LIBËR MËSIMOR

MATEMATIKA PËR KLASËN 9

SIPAS PROGRAMIT NGA MATEMATIKA PËR KLASËN E 9 TË SHKOLLËS FILLORE NËNTËVJEÇARE

Sju Pemberton, Patrik Kivlin dhe Pol Vinters

lamina

Botimi 7, 2024

Essential Mathematics for Cambridge Secondary 1 Stage 9 Pupil Book
Text © Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters 2014
Illustrations © Oxford University Press 2014
This book was originally published in English in 2014.
This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

Matematika 9, libër
Teksti © Sju Pemberton, Patrik Kivlin dhe Pol Vinters 2014
Ilustrime origjinale © Oksford Juniversiti Pres, 2014
Libri për herë të parë është botuar në gjuhën angleze në vitin 2014.
Ky përkthim është publikuar në marrëveshje me "Oksford Juniversiti Pres".

Autorë
Sju Pemberton, Patrik Kivlin dhe Pol Vinters
(Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters)

Botimi i përshtatur në shqip
Ars Lamina-publikime, Shkup 2024
Të drejtat autoriale © 2024 Ars Lamina-publikime
Kryeredaktor
Branka Bugariska

Redaktor
Biljana Stojoska-Zllatkov

Përkthimi nga gjuha angleze
Ismail Ameti

Redaktimi gjuhësor
Refail Sulejmani

Redaktimi profesional
Dr. Aneta Gacovska-Barandoska, docente në Institutin për matematikë
Fakulteti matematiko-natyror, Universitetit "Shën Kirili dhe Metodi", Shkup
Dr. Vesna Dimitrievska Ristovska, docente në FINKI
Universiteti "Shën Kirili dhe Metodi", Shkup
Mr. Metodija Jançeski, asistent në FINKI
Universiteti "Shën Kirili dhe Metodi", Shkup
Vesna Bojaxhieva, profesoreshë e matematikës
SH.F "Koço Racin" – Shkup

Rregullimi teknik
Ars Lamina

Dizajn i kopertinës
Darko Fidanoski

Shtypi
Branko Gapo – prodhime grafike, Shkup 2024

Tirazhi
1000

Të gjitha të drejtat janë të rezervuara. Asnjë pjesë e këtij libri nuk mund të riprodhohet ose të transmetohet në asnjë formë ose me çfarëdo mënyre, në mënyrë elektronike ose mekanike, duke përfshirë fotokopimin, dokumentimin ose ruajtjen në sistem për gjetje të sërishme pa marrë pëlqim me shkrim nga ana e botuesit.

Ky libër mësimor është miratuar për përdorim në arsimin fillor nëntëvjeçar, me Aktvendim për vazhdimin e vlefshmërisë së Vendimit për përdorimin e librit mësimor per lëndën Matematika për klasën e 9-të nr. 08-9084/1 të datës 25.07.2018
të Ministrisë së Arsimit dhe Shkencës së Republikës së Maqedonisë.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=18

PEMBERTON, Sue
Matematika për klasën 9 : sipas programit nga matematika për klasën e 9 të shkollël fillore nëntvjeçare : libër mësimor / Sju Pemberton, Patrik Kivlin dhe Pol Vinters ; [përkthimi nga gjuha angleze Ismail Ameti]. - Botimi 7. - Shkup : Ars lamina - publikime, 2024. - IV, 307 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Essential mathematics for Cambridge secondary 1 stage 9 : pupil book / Sue Pemberton, Patrick Kivlin and Paul Winters. -
Fjalor: стр. 305-307

ISBN 978-608-280-016-5

1. Kivlin, Patrick [автор] 2. Winters, Paul [автор]

COBISS.MK-ID 64136197

Përmbajtja

1 Numri dhe zgjidhja e problemeve 1
- 1.1 Rrumbullakimi i numrave 2
- 1.2 Fuqitë 5
- 1.3 Fuqitë me bazë 10 dhe tregues numër të plotë 11
- 1.4 Shumëzimi dhe pjesëtimi me numër dhjetor 13
- 1.5 Mbledhja dhe zbritja e thyesave 16
- 1.6 Shumëzimi i thyesave 20
- 1.7 Pjesëtimi i thyesave 23
- 1.8 Numrat e plotë pozitivë dhe negativë 24
- Detyra për përsëritje 28

2 Algjebra dhe zgjidhja e problemeve 30
- 2.1 Thjeshtimi i fuqive 31
- 2.2 Rregullat për operacionet me fuqi me baza të barabarta 32
- 2.3 Zbërthimi në shumëzues 34
- 2.4 Mbledhja dhe zbritja e thyesave algjebrike 36
- 2.5 Barazimet lineare 38
- 2.6 Formulimi i shprehjeve algjebrike 40
- 2.7 Funksioni invers 42
- 2.8 Rregulla për caktimin e anëtarit të ardhshëm të vargut 45
- 2.9 Rregulla për caktimin e anëtarit të n-të te vargut 49
- 2.10 Anëtari i n-të i vargut aritmetik 52
- Detyra për përsëritje 55

3 Gjeometria dhe zgjidhja e problemeve 58
- 3.1 Tre dimensionet 59
- 3.2 Simetria boshtore në tre dimensione 64
- 3.3 Tesalacioni 66
- 3.4 Përshkrimi i transformimeve 70
- 3.5 Zmadhimi dhe ngjashmëria 75
- Detyra për përsëritje 80

4 Matja dhe zgjidhja e problemeve 84
- 4.1 Shndërrimi i njësive matëse 84
- 4.2 Syprina 87
- 4.3 Rrethi 91
- Detyra për përsëritje 95

5 Puna me të dhëna dhe zgjidhja e problemeve 98
- 5.1 Planifikimi i hulumtimit 98
- 5.2 Instrumenti për mbledhjen e të dhënave 102
- 5.3 Diagramet trung-gjethe 107
- 5.4 Statistikat për grupe të mëdha të dhënash 111
- 5.5 Krahasimi i shpërndarjeve 117
- Detyra për përsëritje 122

6 Numri dhe zgjidhja e problemeve 126
- 6.1 Rrënjët katrore dhe kubike 127
- 6.2 Rendi i operacioneve 130
- 6.3 Zmadhimi dhe zvogëlimi në përqindje 132
- 6.4 Krahasimi i raporteve 138
- 6.5 Përpjesëtimi (proporcioni) 144
- Detyra për përsëritje 150

7 Algjebra dhe zgjidhja e problemeve 154
- 7.1 Nxjerrja e formulave dhe zëvendësimi i numrave në formula 155
- 7.2 Të shprehurit e ndryshores 159
- 7.3 Koeficienti i drejtimit të grafikut të funksionit 166
- 7.4 Grafiku i funksionit linear 167
- 7.5 Funksionet që dalin nga situatat e jetës reale 170
- 7.6 Proporcioni i drejtë 172
- 7.7 Zgjidhja grafike e sistemeve të barazimeve 174
- 7.8 Zgjidhja e sistemit të barazimeve me metodën e eliminimit 175
- 7.9 Shumëzimi i dy shprehjeve algjebrike 180
- 7.10 Tentimet dhe gabimet 183
- 7.11 Joabarazimet 185
- Detyra për përsëritjee 190

8 Gjeometria dhe zgjidhja e problemeve 192
- 8.1 Konstruktimi i drejtëzave 193
- 8.2 Konstruktimi i shumëkëndëshave të rregullt 197
- 8.3 Vendi gjeometrik i pikave 200
- 8.4 Këndet e shumëkëndëshit 203
- 8.5 Mozaikët e rregullt 214
- 8.6 Hartat dhe azimuti 217
- 8.7 Teorema e Pitagorës 222
- 8.8 Zbatimi i teoremës së Pitagorës 226
- Detyra për përsëritje 230

9 Matja dhe zgjidhja e problemeve 236
- 9.1 Shpejtësia mesatare 236
- 9.2 Njësitë matëse të nxjerra 240
- 9.3 Vëllimi 246
- 9.4 Prizmi dhe cilindri 249
- Detyra për përsëritje 254

10 Puna me të dhëna dhe zgjidhja e problemeve 257
- 10.1 Diagramet me pika dhe korrelacioni 257
- 10.2 Gjasa eksperimentale 263
- 10.3 Ngjarjet që reciprokisht përjashtohen 268
- 10.4 Tabela e ngjarjeve 271
- Detyra për përsëritje 277

Detyrat për vetëkontroll për temat 1 dhe 6 277
Detyrat për vetëkontroll për temat 2 dhe 7 284
Detyrat për vetëkontroll për temat 3 dhe 8 288
Detyrat për vetëkontroll për temat 4 dhe 9 295
Detyrat për vetëkontroll për temat 5 dhe 10 300

Fjalor 305

Hyrje

Ky libër mësimor është përshtatur sipas programit nacional të matematikës të miratuar nga Byroja për zhvillimin e arsimit të Republikës së Maqedonisë dhe është miratuar nga Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë.

Libri mësimor shfrytëzohet në mënyrë të lehtë dhe fleksibile, pasi që tërësisht e ndjek radhën e qëllimeve mësimore të programit në gjysmëvjetorin e parë dhe të dytë, duke i nxitur nxënësit të kyçen në mënyrë aktive në përmbajtjet mësimore me qëllim që t'i zhvillojnë shkathtësitë kërkimore së bashku me njohuritë tematike.

Seksionet dhe shënimet vijuese janë krijuar për ndjekje më të lehtë të përmbajtjes së librit:

Qëllimet mësimore

Qëllimet mësimore janë në pajtueshmëri me programin mësimor për këtë klasë dhe përmes tyre përshkruhen lëmenjtë të cilët mësohen dhe rezultatet e pritura në secilën temë.

Strategjitë, teknikat dhe shkathtësitë mentale në zgjidhjen e problemeve matematikore janë përfshirë në përmbajtjen e tërë librit.

Shembuj

Në secilin mësim janë dhënë shembuj të zgjidhur me qëllim që të ilustrohen dhe zgjerohen përmbajtjet të cilat përpunohen në atë tërësi mësimore. Nxënësit do të duhet t'i zgjidhin këta shembuj në mënyrë të pavarur, e pastaj t'i krahasojnë përgjigjet e tyre me zgjidhjet e fituara

Detyra për zbatim praktik: Me këto detyra zhvillohen njohuritë dhe shkathtësitë në atë mënyrë që nxënësit do të nxiten të mendojnë në mënyrë kreative ose të zhvillojnë qasje metodike, shpeshherë duke punuar në detyrat e përditshmërisë.

Detyra për zgjerimin e njohurisë: Këto detyra paraqesin nxitje plotësuese në krahasim me detyrat e rëndomta në këtë libër. Të këto detyra kërkohet të zbatohen dhe zgjerohen përmbajtjet e mësuara të secilit mësim.

Në kornizë janë dhënë udhëzime dhe këshilla të dobishme që duhet të mbahen në mend për shkak të zgjidhjes më të lehtë të problemeve matematikore.

Fjalët kyçe: kur do të përdoret fjala kyçe për herë të parë, ajo do të theksohet me **shkronja të kuqe** të trasha. Definicionet e të gjitha fjalëve kyçe mund të gjenden te fjalori në fund të librit.

Për ushtrimin e shkathtësive dhe zbatimin e diturive, si për detyrat e shtëpisë ashtu edhe për detyrat në shkollë, në mënyrë plotësuese, botuesi Ars Lamina publikime, përmes faqes obrazovanie.literatura.mk siguron qasje gratis deri te një numër i madh i resurseve online për mësimdhënësit dhe ide për realizimin e mësimdhënies, si dhe materiale dhe këshilla për prindërit (për punë me fëmijë dhe ide për projekte jashtë klasës), si mbështetje për zbatimin më efikas dhe më efektiv të programit mësimor të kësaj lëndet.

1 Numri dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Rrumbullakon numra deri në numër të caktuar të vendeve dhjetore; rrumbullakimin e shfrytëzon që të vijë te zgjidhja e problemit me shkallë të caktuar saktësie.
- Shfrytëzon fuqi me tregues fuqie: zero, numër të plotë pozitiv dhe negativ dhe ligje për shumëzim dhe pjesëtim të fuqive, treguesit e së cilave janë numra të plotë pozitivë.
- Mbledh, zbret, shumëzon dhe pjesëton numra të plotë.
- E njeh ekuivalencën ndërmjet 0,1; $\frac{1}{10}$ dhe 10-1; shumëzon dhe pjesëton numra të plotë ose numra dhjetorë me fuqi me bazë 10 dhe me tregues fuqie numër pozitiv apo negativ.
- I identifikon rezultatet gjatë shumëzimit dhe pjesëtimit me numra ndërmjet 0 dhe 1.
- E kupton mirë nevojën e rregullave për operacione aritmetike dhe inverse për thjeshtim të njehsimit.
- E zgjeron diturinë prej metodave mentale për njehsime, duke punuar me numra dhjetorë, thyesa, përqindje dhe shumëzues, duke përdorur shënime.
- Shumëzon me numra dhjetorë, kupton ku të vendoset presja dhjetore, duke përdorur njehsime ekuivalente; pjesëton me numra dhjetorë përmes transformimit në të pjesëtuarit me numër të plotë.
- E përforcon diturinë për shënim të thyesës në formë të pathjeshtueshme me thjeshtim të pjesëtuesve të përbashkët.
- Mbledh, zbret, shumëzon dhe pjesëton thyesa, e interpreton pjesëtimin si operacion invers të shumëzimit dhe thjeshton me pjesëtues të përbashkët para se të shumëzojë ose të pjesëtojë thyesa.

Njehsimi me dorë



Para zbulimit të kalkulatorëve shumë njehsime ishin bërë me dorë.

Ishin në përdorim disa mjete njehsimi.

Një nga ato është vizorja me rrëshqitës.

Në vizatime janë paraqitur një vizore rrethore me rrëshqitës dhe një vizore drejtkëndore me rrëshqitës.

Vizorja me rrëshqitës përdorej për shumëzim me kalim dhe për pjesëtim përmes mbledhjes.

Njehsimet bëheshin me ndihmën e fuqive dhe eksponentëve.



1.1 Rrumbullakimi i numrave

Vendet dhjetore

Numrat dhjetorë mund t'i rrumbullakojmë në numër të caktuar në **vende dhjetore.**

Rrumbullakimi në një vend dhjetor (1 dhjetore) domethënë se ka 1 shifër pas presjes dhjetore.

Rrumbullakimi në dy vende dhjetore (2 dhjetore) domethënë se ka 2 shifra pas presjes dhjetore.

Numrat dhjetorë mund t'i rrumbullakojmë në 3 dhjetore, 4 dhjetore etj.

Kur rrumbullakojmë në 1 dhjetore duhet ta shqyrtojmë dhjetoren e dytë.

Nëse dhjetorja e dytë është 5 ose më e madhe se 5, atëherë dhjetoren e parë duhet ta zmadhojmë për 1, gjegjësisht rrumbullakojmë "me tepricë". Nëse dhjetorja e dytë është më e vogël se 5, atëherë dhjetorja e parë mbet e pandryshuar, gjegjësisht rrumbullakojmë "me mungesë".

Nëse rrumbullakojmë me 2 dhjetore, atëherë duhet ta shqyrtojmë dhjetoren e tretë.
Në vend të "vendeve dhjetore" më tutje do të shkruajmë shkurt "v.dh."

Shembulli 1

Rrumbullakoji numrat në numër të caktuar vendesh dhjetore.

a) 23,956 në 1 v.dh.

b) 4,9762 në 2 v.dh.

c) 23,5804 në 3 v.dh.

ç) 8,0325 në 3 v.dh.

a) 23,956 është ndërmjet 23,9 dhe 24,0

Dhjetorja e dytë është e barabartë me 5, prandaj dhjetorja e parë rritet për 1, domethënë do të jetë 10 (shkruajmë 0 dhe 1 kalon në numrin e plotë).

23,956 është 24 në 1 v.dh. Zeroja në fund të numrit 24,0 na tregon se numri është rrumbullakuar në 1 v.dh.

b) 4,9762 është ndërmjet 4,97 dhe 4,98.

Dhjetorja e tretë është më e madhe se 5, prandaj rrumbullakojmë "me tepricë"

4,9762 është 4,98 në 2 v.dh. Zeroja në fund të 23,580 na tregon se numri është rrumbullakuar në 3 v.dh.

c) 23,5804 është ndërmjet 23,580 dhe 23,581

Dhjetorja e katërt është më e vogël se 5, prandaj rrumbullakojmë "me mungesë" 23,5804 është 23,580 në 3 v.dh.

ç) 8,0325 është ndërmjet 8,032 dhe 8,033

Dhjetorja e katërt është më e madhe ose e barabartë me 5, prandaj rrumbullakojmë "me tepricë"

8,0325 është 8,033 në 3 v.dh.

Shifrat e rëndësishme

Numrat mund t'i rrumbullakojmë në numër të dhënë të **shifrave të rëndësishme.**

Shifrat e rëndësishme i përcaktojmë duke filluar nga e majta prej shifrës së parë jozero.

Në vend të "shifrave të rëndësishme" shkurt do të shënojmë "sh.r.".

Shifra të rëndësishme për numrin 342,014:

3	4	2	,	0	1	4
↑	↑	↑		↑	↑	↑
e para sh.r.	e dyta sh.r.	e treta sh.r.		e katërta sh.r.	e pesta sh.r.	e gjashta sh.r.

E para shifër e rëndësishme është 3. Ajo është shifra më e rëndësishme pasi që vlera e saj është 300.

Shifra të rëndësishme për numrin 0,0345:

0	,	03	4	5
		↑	↑	↑
		e para sh.r.	e dyta sh.r.	e treta sh.r.

E para shifër e rëndësishme është 3. Zerot në fillim të numrit nuk janë shifra të rëndësishme.

Kur ndonjë numër duhet ta rrumbullakojmë në numër të kërkuar të shifrave të rëndësishme e shqyrtojmë shifrën e rëndësishme vijuese. Nëse ajo është 5 ose më e madhe se 5, atëherë shifrën e rëndësishme paraprake e zmadhojmë për 1. Në të kundërtën, shifra e rëndësishme paraprake ngel e njëjtë. Është shumë e ngjashme sikur mënyra e rrumbullakimit të numrave, por në këtë rast i shqyrtojmë vetëm shifrat e rëndësishme.

Shembulli 2

Rrumbullako numrat në 2 shifra të rëndësishme.

a) 789 **b)** 6,0524 **c)** 0,002534 **ç)** 0,603

a)

7	8	9
↑	↑	↑
e para sh.r.	e dyta sh.r.	e treta sh.r.

Shifra e tretë e rëndësishme është më e madhe se 5, prandaj rrumbullakojmë me tepricë.

789 = 790 (2 sh.r.)

Gjithmonë kontrolloni vallë shifra më e theksuar pas rrumbullakimit ka vlera të njëjta vendore sikurse para rrumbullakimit. Në shembullin, 7 vlen 700 para rrumbullakimit dhe përsëri vlen 700 pas rrumbullakimit"

b)

6	,	0	5	2	4
↑		↑	↑		
e para sh.r.		e dyta sh.r.	e treta sh.r.		

Shifra e tretë e rëndësishme është 5, prandaj rrumbullakojmë me tepricë.

6,0524 = 6,1 (2 sh.r.)

c) 0 , 0 0 2 5 3 4

↑ ↑ ↑

e para sh.r. e dyta sh.r. e treta sh.r.

Shifra e tretë e rëndësishme është më e vogël se 5, prandaj rrumbullakojmë me mungesë.

0,002534 = 0,0025 (2 sh.r.)

ç) 0 , 6 0 3

↑ ↑ ↑

e para sh.r. e dyta sh.r. e treta sh.r.

Shifra e tretë e rëndësishme është më e vogël se 5, prandaj rrumbullakojmë me mungesë.

0,603 = 0,60 (2 sh.r.)

Në sa shifra të caktuar të rrumbullakojmë?

Nganjëherë duhet të marrim qëndrim me çfarë saktësi do ta rrumbullakojmë numrin, gjegjësisht me sa shifra të rëndësishme do ta shënojmë numrin. Numrin e shifrave të rëndësishme e quajmë **shkallë të saktësisë.**

Zgjidhja përfundimtare nuk guxon të ketë më tepër shifra të rëndësishme se sa numri i shifrave të rëndësishme të numrave të shfrytëzuar në njehsimin.

Shembulli 3

Andreu bëri 16 ëmbëlsira duke përdorur gjithsej 125 g miell.

Sa miell ka në secilën ëmbëlsirë?

Zgjidhjen paraqite me shkallë të caktuar saktësie.

125 : 16 = 7,8125 g

Mielli ishte matur deri në 3 shifra të rëndësishme (sipas numrit të dhënë në kushtin e detyrës).

Masa e miellit në një ëmbëlsirë nuk mund të përmbajë më tepër se 3 shifra të rëndësishme.

7,8 g (2 sh.r.) është saktësi mirë e zgjedhur, pasi që është rrumbullakuar në 2 sh.r. që është për 1 sh.r. më pak se numri i sh.r. nga numri i dhënë në detyrë.

Detyra

1. Rrumbullakoji numrat në numër të dhënë vendesh dhjetore.

a) 12,59 në 1 v.dh. **b)** 3,428 në 2 v.dh. **c)** 5,98 në 1 v.dh. **ç)** 49,9752 në 1 v.dh.

d) 19,95 në 1 v.dh. **dh)** 1,0508 në 3 v.dh. **e)** 3,05 në 1 v.dh. **ë)** 5,8602 në 3 v.dh.

2. Rrumbullakoji numrat në 2 shifra të rëndësishme.

a) 48,2 **b)** 2,59 **c)** 5,605 **ç)** 8,03

d) 40,09 **dh)** 7,98 **e)** 29,7 **ë)** 49,09

3. Rrumbullakoji numrat në 1 shifër të rëndësishme.

a) 32 **b)** 407 **c)** 970 **ç)** 2348

d) 0,056 **dh)** 76,8 **e)** 8345 **ë)** 99

4. Rrumbullakoji numrat në 3 shifra të rëndësishme.

a) 4589 **b)** 23,56 **c)** 1,0435 **ç)** 0,002387

d) 0,04289 **dh)** 0,05832 **e)** 0,0088412 **ë)** 0,05997

5. Njehso me kalkulator.

Zgjidhjet rrumbullakoji në 2 shifra të rëndësishme.

a) 23 : 7 **b)** 6 : 38 **c)** 3 : 129 **ç)** 520 · 530

d) 0,28 : 34 **dh)** 20 : 3 **e)** 8 : 9 **ë)** 49 : 11

6. Një picë me masë 0,850 kg në mënyrë të barabartë duhet t'iu ndahet 6 njerëzve.

Nga sa do të fitojë secili? Zgjidhjen shkruaje në kilogram me shkallë saktësie adekuate.

7. Aleksandri vrapon 125 m për 22,5 sekonda.

Sa metra kalon në çdo sekondë? Shkruaje zgjidhjen me shkallë saktësie adekuate.

8. Lejla ka matur distancë prej 100 m.

Sqaro me shembuj përse nuk mund të themi se numri a është i rrumbullakuar në 1, 2 apo 3 shifra të rëndësishme.

9. Marku njehsoi 3,5 · 3,5 = 12,25.

Tento me numra të tjerë ta kontrollosh këtë pohim.

3,25 · 3,25 = 10,5625

3,255 · 3,255 = 10,595025

Ai thotë: "Kur shumëzon numër me 1 v.dh. me numër me 1 v.dh. gjithnjë fiton rezultat me 2 v.dh."

"kurse kur shumëzon numër me 2 v.dh. me numër me 2 v.dh. gjithnjë fiton rezultat me 4 v.dh." etj.

A flet Marku të vërtetën?

10. Filipi ka matur gjerësinë e librit të tij. Mati 23,5 cm të rrumbullakuar në 1 v.dh. Sa mund të jenë vlera më e madhe dhe vlera më e vogël e gjerësisë?

1.2 Fuqitë

Treguesi i fuqisë (eksponenti)

Në shënimin 5^3 numrin ^{3}të shënuar në pjesën e sipërme të numrit 5, e quajmë **tregues të fuqisë** ose **eksponent.** Treguesi i fuqisë na tregon sa herë numri 5 është i shumëzuar me vetveten.

Numrin 5 e quajmë **bazë**.

Treguesi i fuqisë tregon sa herë baza është shumëzuar me vetveten.

$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

Gjashtë katërshe shumëzohen mes veti. Ta shqyrtojmë shumëzimin hap pas hapi.

$4 \cdot 4 = 16 \quad 16 \cdot 4 = 64 \quad 64 \cdot 4 = 256 \quad 256 \cdot 4 = 1024 \quad 1024 \cdot 4 = 4096$

Ja edhe disa shembuj:

$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$

$7^1 = 7$

Në shembullin e fundit eksponenti 1 nuk është i nevojshëm.

Për secilin numër mund të merret se ka tregues 1.

$x^1 = x$

Shembulli 1

Shkruaj në formë të fuqisë.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

c) $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

a) Tetë pesa shumëzohen mes veti.

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

b) Ka gjashtë dhjetëshe.

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

c) Ka dy tresha dhe pesë katërshe.

Bazat janë të ndryshme, prandaj të shënuarit e fuqive e bëjmë veç e veç.

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3^2 \cdot 4^5$

Shembulli 2

Njehsoje vlerën e fuqive të dhëna:

a) 2^6 **b)** 6^3 **c)** 8^7

a) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

b) $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

c) Zgjidhjet nën **a)** dhe **b)** lehtë i njehsojmë pa përdorim të kalkulatorit.

Nën **c)** do të përdorim kalkulator. Në kalkulator gjendet tasti i shënuar me x^y ose $x^{\square}$.

Fitojmë se $8^7 = 2097152$

Rregullat për operacionet me fuqi me baza të barabarta

Ta shqyrtojmë prodhimin $6^4 \cdot 6^3$

Prodhimin e këtillë mund ta shënojmë kështu: $6^4 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$

katër gjashtëshe tre gjashtëshe shtatë gjashtëshe

Shkurt: $6^4 \cdot 6^3 = 6^{4+3} = 6^7$

Domethënë, **rregulla për shumëzim të fuqive me baza të barabarta është:**

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Kur shumëzohen fuqi me baza të barabarta, baza ngel e njëjtë, kurse treguesit mblidhen.

Tash ta shikojmë pjesëtimin $7^5 : 7^3$

Nëse e shënojmë në formë të thyesës, fitojmë: $7^5 : 7^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}$

$= 7 \cdot 7 = 7^2$

Pas thjeshtimit, mbetën 5 - 3 = 2 shtatëshe.

Shkurt: $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

Domethënë, **rregulla për pjesëtim të fuqive me baza të barabarta është:**

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

Kur pjesëtohen fuqi me baza të barabarta, baza ngel e njëjtë, kurse treguesit zbriten.

Të zbulojmë edhe dy rregulla të reja.

Ta shikojmë pjesëtimin $6^5 : 6^5$

Nëse e përdorim rregullën për pjesëtim të fuqive, fitojmë $6^5 : 6^5 = 6^{5-5} = 6^0$

Nëse pjesëtojmë, kemi $6^5 : 6^5 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1$

Dy zgjidhjet për një detyre të njëjtë patjetër të jenë të barabarta.

Fitojmë $6^0 = 1$

Kjo është e saktë për çdo pjesëtim në formë të $x^a : x^a$ dhe çon kah ky rregull:

$$x^0 = 1$$

Cilido numër jo zero i ngritur në fuqinë 0 është i barabartë me 1.

Ta shqyrtojmë fuqinë $(4^2)^5$.

Kjo do të thotë $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{10}$

Dimë se $10 = 2 \cdot 5$

Tani të shqyrtojmë $(6^3)^4 = 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 = 6^{12}$

Në këtë rast dimë se $12 = 3 \cdot 4$

Kështu e fitojmë **rregullën për fuqizim të fuqisë:**

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Gjatë fuqizimit të fuqisë, baza ngel e njëjtë, kurse treguesit shumëzohen.

Shembulli 3

Thjeshtoji fuqitë.

a) $7 \cdot 7^3$ **b)** $8^9 : 8^5$ **c)** $(3^2)^7$ **ç)** $5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

a) Gjatë shumëzimit të fuqive, treguesit i mbledhim.

Dimë se $7 = 7^1$

$7^1 \cdot 7^3 = 7^4$

b) Gjatë pjesëtimit të fuqive, treguesit i zbresim.

$8^9 : 8^5 = 8^4$

c) Gjatë fuqizimit të fuqisë, treguesit i shumëzojmë.

$(3^2)^7 = 3^{14}$

ç) Kjo detyrë është kombinim prej shumëzimit, pjesëtimit dhe fuqizimit të fuqive.

$5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

$= 5^3 \cdot 5^{12} : 5^7$

$= 5^{3+12-7} = 5^8$

Shembulli 4

Njehsoni vlerat e shprehjeve.

a) $4^6 : 4^4$ **b)** 25^0 **c)** $7^4 \cdot 7^5 : 7^8$

a) $4^6 : 4^4 = 4^2 = 16$ Më lehtë është nëse e thjeshtojmë shprehjen përpara fuqizimit.

b) $25^0 = 1$ Cilido numër i ngritur në fuqi 0 është i barabartë me 1.

c) $7^4 \cdot 7^5 : 7^8 = 7^{4+5-8} = 7^1 = 7$

Detyra

1. Shkruaji prodhimet e dhëna në formë të fuqisë ose fuqive.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $5 \cdot 5 \cdot 5$

c) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ **ç)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

d) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ **dh)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

e) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$ **ë)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

f) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ **g)** $x \cdot y \cdot y \cdot y$

gj) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$ **h)** $p \cdot q \cdot r \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r$

2. Njehsoje vlerën e fuqive:

a) 2^4 **b)** 3^3 **c)** 5^6 **ç)** 10^5 **d)** 9^2

dh) 1^8 **e)** 1^{10} **ë)** 8^0 **f)** 12^1 **g)** 15^0

3. Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet shënoji në formë të fuqisë.

a) $3^4 \cdot 3^5$ **b)** $4^7 \cdot 4^2$ **c)** $5^9 \cdot 5^2$ **ç)** $3 \cdot 3^4$

d) $7^4 : 7^2$ **dh)** $6^8 : 6^5$ **e)** $10^{11} : 10^4$ **ë)** $5^9 : 5^8$

f) $(2^3)^3$ **g)** $(3^4)^2$ **gj)** $(10^2)^4$ **h)** $(7^4)^5$

4. Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet shënoji në formë të fuqisë.

a) $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4$ **b)** $5^9 \cdot 5^2 : 5^6$ **c)** $(8^2)^3 : 8^6$

ç) $(5^3)^4 \cdot 5$ **d)** $7^3 \cdot 7 : 7^2$ **dh)** $(9^4)^5 : (9^3)^6$

e) $(5^7)^3 \cdot 5^2 : 5^8$ **ë)** $3^5 \cdot 3^3 : 3^8$ **f)** $2 \cdot 2^3 : 2^4$

g) $x^5 \cdot x^4 \cdot x^2$ **gj)** $y^8 \cdot y^4 : y^{10}$ **h)** $(t^3)^2 \cdot t^6 : t^5$

5. Thjeshtoji shprehjet dhe pastaj njehsoje vlerën e tyre.

a) $2^3 \cdot 2^4 : 2^5$ **b)** $(6^3)^4 : 6^{10}$ **c)** $(5^3)^4 : (5^2)^6$

ç) $7^5 : 7^4$ **d)** $10^7 \cdot 10 : 10^6$ **dh)** $3^5 \cdot (3^3)^3 : 3^{11}$

6. Caktoje vlerën e ndryshores x në barazimet:

a) $9^x = 1$ **b)** $(5^x)^3 = 5^6$ **c)** $(8^4)^x = 8^{20}$

ç) $(10^x)^4 = (10^6)^2$ **d)** $(3^x)^6 = 3^6$

Nën **b)**, **c)**, **ç)** dhe **d)** shkruaji të dy anët si fuqi. Për shembull, nën **b)** shkruaj $5^{3x} = 5^6$, prej nga rrjedh se $3x = 6$.

Fuqia me tregues numër negativ

Ta shikojmë pjesëtimin $4^2 : 4^3$

Prej rregullës për pjesëtim të fuqive, fitojmë: $4^2 : 4^3 = 4^{-1}$

Por, nëse pjesëtojmë fitojmë $4^2 : 4^3 = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{4}$

Nga këtu fitojmë se $4^{-1} = \frac{1}{4}$

Tani ta shqyrtojmë pjesëtimin $2 : 2^4$

Sipas rregullës për pjesëtim të fuqive: $2 : 2^4 = 2^{-3}$

Nëse pjesëtojmë, fitojmë: $2 : 2^4 = \frac{\cancel{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2^3}$

Fitojmë se $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Këta janë dy shembuj për rregullën e përgjithshme, për $a > 0$, është:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Shembulli 5

Njehso:

a) 3^{-2} **b)** $10^3 \cdot 10^{-5}$

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{3-5}$

$= 10^{-2}$

$= \frac{1}{10^2}$

$= \frac{1}{100}$

Shembulli 6

Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet shënoji në formë të fuqisë.

a) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$ **b)** $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

a) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$

$= 6^{3+(-5)+4}$

$= 6^2$

b) $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

$= 3^{(-4)-(-6)}$

$= 3^{-4+6}$

$= 3^2$

I zbatojmë rregullat për mbledhje dhe për zbritje të numrave pozitivë dhe negativë.

Detyra

1. Shkruaji fuqitë si thyesa:

a) 2^{-4} **b)** 3^{-1} **c)** 5^{-3} **ç)** 10^{-2}

d) 8^{-2} **dh)** 7^{-2} **e)** 3^{-3} **ë)** 2^{-3}

f) 15^{-2} **g)** 10^{-3}

2. Shkruaje vlerën e shprehjeve të dhëna si thyesa ose si numër të plotë.

a) $5^2 \cdot 5^{-3}$ **b)** $6 \cdot 6^{-1}$ **c)** $2^4 \cdot 2^{-3}$ **ç)** $10^{-2} \cdot 10$

d) $7^4 \cdot 7^{-5}$ **dh)** $3^4 \cdot 3^{-6} \cdot 3^2$ **e)** $2^9 : 2^{10}$ **ë)** $3 : 3^{-1}$

f) $6^2 : 6^3$ **g)** $10^4 : 10^3$ **gj)** $2^5 \cdot 2^{-1} : 2^2$ **h)** $4^2 \cdot 4^{-5} \cdot 4$

3. Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet shënoji në formë të fuqisë.

a) $4^3 \cdot 4^{-7}$ **b)** $5^{-2} \cdot 5^5$ **c)** $8^2 : 8^4$ **ç)** $6^7 : 6^{-3}$

d) $(3^2)^{-1} \cdot 3^{-4}$ **dh)** $2^5 : (2^2)^{-3}$ **e)** $2 \cdot 2^{-5} : 2^3$ **ë)** $3^4 : 3^{-5} \cdot (3^2)^2$

f) $x^5 \cdot x^{-5}$ **g)** $x^4 \cdot x^{-6}$ **gj)** $y^2 : y^5$ **h)** $x^7 : x^{-2} \cdot x^{-4}$

4. Njehsoje vlerën e sheprehjeve:

a) $9 \cdot 3^3$ **b)** $8 \cdot 2^4$ **c)** $10^3 \cdot 100$ **ç)** $16 : 2^4$

d) $4^3 : 2^5$ **dh)** $9^2 \cdot 3^{-3}$ **e)** $4^{-3} \cdot 8^2$ **ë)** $8^2 : 2^3 \cdot 4^{-2}$

5. Caktoje vlerën e ndryshores x në barazimet e dhëna:

a) $(3^2)^x = \frac{1}{9}$ Shkruaje anën e djathtë si fuqi me bazë 3. $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, pra $3^{2x} = 3^{-2}$

b) $(2^x)^2 = \frac{1}{16}$ **c)** $5^x \cdot 5^6 = 25$ **ç)** $7^4 \cdot 7^x = 49$

d) $(2^x)^x = 16$ Kujdes, ka dy zgjidhje të mundshme për ndryshoren x.

1.3 Fuqitë me bazë 10 dhe tregues numër të plotë

Leximi dhe shënimi i fuqive me tregues numër të plotë dhe bazë 10

Dimë se:

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$

$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$

$10 = 10^1 = 10$

Ta shqyrtojmë rregullën e këtij vargu. Gjithnjë kur fuqia zvogëlohet për 1, vërejmë se:

1. në anën e majtë ka një dhjetëshe më pak,
2. vlera në anën e djathtë është pjesëtuar me 10.

Nëse e vazhdojmë vargun, do të kemi:

$1 = 10^0 = 1$

$\frac{1}{10} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{10 \cdot 10} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Numrat e shënuar si 10^2 dhe 10^{-3} i quajmë shënime në formë të fuqisë ose vetëm fuqi.

Shembulli 1

Njehso vlerat e fuqive: **a)** 10^6 **b)** 10^{-5}

a) $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$ (një milion)

b) $10^{-5} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

Shembulli 2

Shkruaji numrat në formë të fuqisë: **a)** 10000 **b)** 0,0001

a) $10000 = 10^4$

b) $0{,}0001 = 10^{-4}$

Shumëzimi dhe pjesëtimi me fuqi me bazë 10 dhe tregues numra të plotë

Para se të fillojmë me operacionet shumëzim dhe pjesëtim, fillimisht secilin nga fuqitë me bazë 10 e shkruajmë si numër nëse fuqia është më e madhe se 0, ose si thyesë nëse fuqia është më e vogël se 0. Pastaj shumëzojmë ose pjesëtojmë.

Mund të kontrollojmë saktësinë e rezultatit në këtë mënyrë;

Kur shumëzojmë me numër ndërmjet 0 dhe 1 rezultati duhet të jetë më i vogël se numri fillestar.

Kur pjesëtojmë me numër ndërmjet 0 dhe 1 rezultati duhet të jetë më i madh se numri fillestar.

Shembulli 3

Njehso:

a) $245 \cdot 10^3$ **b)** $0{,}25 \cdot 10^{-1}$ **c)** $2{,}45 : 10^{-3}$ **ç)** $230 : 10^2$

a) $245 \cdot 10^3 = 245 \cdot 1000$ — E shkruajmë fuqinë me tregues numër të plotë dhe me bazë 10 si numër (3 është më i madh se 0, domethënë shumëzojmë 10·10·10)

$= 245000$ — Kontrollim: 10^3 është më i madh se 1, rezultati është më i madh se 245. ✓

b) $0{,}25 \cdot 10^{-1} = 0{,}25 \cdot \frac{1}{10}$ — E shkruajmë fuqinë me tregues numër të plotë dhe me bazë 10 si thyesë (-1 është më i vogël se 0, domethënë pjesëtojmë 1: 10)

$= 0{,}025$ — Kontrollim: 10^{-1} është ndërmjet 0 dhe 1, rezultati është më i vogël se 0,25 ✓

c) $2{,}45 : 10^{-3} = 2{,}45 : \frac{1}{1000}$ — E shkruajmë fuqinë me tregues numër të plotë dhe me bazë 10 si thyesë (-3 është më i vogël se 0)

$= 2{,}45 \cdot 1000$ — Pjesëtojmë me thyesë ashtu që shumëzojmë me thyesën reciproke të saj

$= 2450$ — Kontrollim: 10^{-3} është ndërmjet 0 dhe 1, përgjigjja është më e madhe se 2,45 ✓

ç) $230 : 10^2 = 230 : 100$ — E shkruajmë fuqinë me tregues numër të plotë dhe me bazë 10 si numër (2 është më i madh se 0)

$= 2{,}3$ — Kontrollim: 10^2 është më i madh se 1, përgjigjja është më e vogël se 230 ✓

Detyra

Detyrat në vazhdim zgjidhi pa përdorim të kalkulatorit.

1. Shkruaji numrat në formë të fuqisë.

a) 10000000 **b)** 100 **c)** 100000 **ç)** 0,00001 **d)** 0,1 **dh)** 0,000001

2. Njehsoje vlerën e fuqive.

a) 10^3 **b)** 10^5 **c)** 10^9 **ç)** 10^{-5} **d)** 10^{-2} **dh)** 10^0

3. Njehso.

a) $2{,}3 \cdot 10^2$ **b)** $4{,}5 \cdot 10^4$ **c)** $210 \cdot 10^2$ **ç)** $5{,}32 \cdot 10^5$

d) $0{,}45 \cdot 10^2$ **dh)** $20{,}1 \cdot 10^{-1}$ **e)** $508 \cdot 10^{-2}$ **ë)** $5{,}4 \cdot 10^{-3}$

4. Njehso.

a) $289 : 10^2$ **b)** $305 : 10^{-1}$ **c)** $25{,}8 : 10^{-2}$ **ç)** $240 : 10^3$

d) $0{,}25 : 10^{-3}$ **dh)** $0{,}205 : 10^1$ **e)** $2{,}5 : 10^2$ **ë)** $3{,}05 : 10^{-2}$

5. Përshkruaji shprehjet e dhëna. Zëvendëso shenjën "?" me fuqi me tregues numër të plotë dhe me bazë 10 ashtu që barazimi të jetë i saktë.

Krahasoje prodhimin me shumëzuesin tjetër dhe kështu do të dish a duhet të shumëzosh apo të pjesëtosh me numër më të madh ose më të vogël se 1.

a) $40{,}8 \cdot ? = 408$ **b)** $248{,}9 \cdot ? = 2{,}489$ **c)** $48{,}5 : ? = 4850$ **ç)** $2{,}8 : ? = 0{,}0028$

6. Përshkruaji shprehjet e dhëna. Zëvendëso shenjën "?" me vlerën për të cilën barazimi kalon në gjykim të saktë.

Numrat e kërkuar duhet t'i përmbajnë shifrat 2 dhe 4 në atë radhitje.

a) $? \cdot 10^3 = 24$ **b)** $? \cdot 10^{-2} = 24$ **c)** $? : 10^5 = 2{,}4$ **ç)** $? : 10^{-3} = 240$

7. Mihaili mori këtë detyrë nga arsimtari:

$245 \square ? = 2{,}45$

Duhet $\square$ ta zëvendësoj me · ose :

Duhet? ta zëvendësoj me numër.

Mihaili thotë se ka më tepër se një zgjidhje.

Përcakto aq sa mundesh më tepër zgjidhje për $\square$ dhe?

1.4 Shumëzimi dhe pjesëtimi me numër dhjetor

Shumëzimi me numër dhjetor

Faktet që tanimë i dimë mund t'i përdorim për shumëzim të numrave dhjetorë. Mund të përdorim **njehsime ekuivalente** si ndihmë gjatë shumëzimit të numrave dhjetorë.

Dallimi është në atë që në rezultatin përfundimtar duhet të vendosim presjen dhjetore.

Për shembull, në vend se të shumëzojmë me 0,3 fillimisht shumëzojmë me 3, kurse pastaj rezultatin e pjesëtojmë me 10.

Në vend se të shumëzojmë me 0,03, fillimisht shumëzojmë me 3, kurse pastaj rezultatin e pjesëtojmë me 100.

Nëse duhet të njehsojmë 300· 0,2 atëherë 300 e pjesëtojmë me 10, dhe 0,2 e shumëzojmë me 10.

Kjo na jep $30 \cdot 2$ si njehsim ekuivalent.

Tash është lehtë të njehsojmë $30 \cdot 2 = 60$.

Shembulli

Njehso: **a)** $700 \cdot 80$ **b)** $400 \cdot 0{,}6$ **c)** $0{,}15 \cdot 0{,}06$

a) $700 \cdot 80 = 7 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10$
$= 7 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 10$
$= 56 \cdot 1000$
$= 56\,000$

Këtë mënyrë mund ta shfrytëzojmë për njehsim përmendësh.

b) $400 \cdot 0{,}6 = 40 \cdot 6$
$= 240$

Transformojmë me njehsim ekuivalent dhe e fitojmë rezultatin e njëjtë.

c) $0{,}15 \cdot 0{,}06$

Në fillim shumëzojmë pa presjet dhjetore, $15 \cdot 6 = 90$.

Pastaj e njehsojmë numrin e përgjithshëm të vendeve dhjetore të shumëzuesve.

Në këtë rast kemi te dy shumëzuesit gjithsej 4 vende dhjetore. Kjo do të thotë se në zgjidhjen e fituar duhet të ketë katër vende dhjetore.

Rezultati është 0,0090.

Ki kujdes kur në zgjidhjen e fituar duhet të ndash vende dhjetore. Duhet t'i numërosh vendet dhjetore të rezultatit të fituar. Në rastin tonë, numri 90 ka dy shifra dhe prandaj shtojmë edhe dy zero në rezultatin përfundimtar. Numërimin e vendeve dhjetore e bëjmë nga e djathta në të majtë, respektivisht nga prapa.

Detyra

Detyrat në vazhdim zgjidhi pa përdorim të kalkulatorit.

1. Njehso.

a) $30 \cdot 60$ **b)** $40 \cdot 30$ **c)** $20 \cdot 300$ **ç)** $500 \cdot 30$
d) $400 \cdot 50$ **dh)** $60 \cdot 7000$ **e)** $600 \cdot 5000$ **ë)** $240 \cdot 600$

2. Njehso.

a) $400 \cdot 0{,}2$ **b)** $300 \cdot 0{,}8$ **c)** $800 \cdot 0{,}7$ **ç)** $500 \cdot 0{,}4$
d) $150 \cdot 0{,}3$ **dh)** $250 \cdot 0{,}7$ **e)** $125 \cdot 0{,}3$ **ë)** $25 \cdot 0{,}4$

3. Njehso.

a) $0{,}25 \cdot 0{,}2$ **b)** $0{,}35 \cdot 0{,}4$ **c)** $0{,}24 \cdot 0{,}03$ **ç)** $0{,}24 \cdot 0{,}4$
d) $0{,}02 \cdot 0{,}03$ **dh)** $0{,}32 \cdot 0{,}04$ **e)** $0{,}55 \cdot 0{,}4$ **ë)** $7{,}5 \cdot 0{,}4$

4. Çfarë vëren te shprehjet?

a) $12 \cdot 0{,}2$ $48 : 20$ $6 \cdot 0{,}4$ $24 \cdot 0{,}1$ $9{,}6 : 4$
b) $64 : 20$ $32 \cdot 10^{-1}$ $80 \cdot 0{,}04$ $96 : 30$ $12{,}8 : 4$

5. Shëno disa shprehje me shumëzim dhe pjesëtim që kanë rezultat të njëjtë 4,8.

6. Gjej tre numra, prodhimi i të cilëve është 0,08.

Gjej tre numra prodhimi i të cilëve është 8 dhe pastaj vendos ku duhet të jenë presjet dhjetore në secilin numër.

7. Njehso.

a) $1,5 \cdot 1,5$ **b)** $1,2 \cdot 1,2$ **c)** $1,6 \cdot 0,16$ **ç)** $14 \cdot 0,14$

Pjesëtimi me numër dhjetor

Pjesëtimin me numër dhjetor e transformojmë në pjesëtim me **numër të plotë**.

Për këtë qëllim shfrytëzojmë **thyesa ekuivalente**.

Thyesat që kanë vlerë të barabartë, janë thyesa ekuivalente.

Shembulli

Njehso:

a) $\frac{6}{0,2}$ **b)** $\frac{30}{0,1}$ **c)** $\frac{0,09}{0,01}$ **ç)** $2,5 : 0,05$

a) $\frac{6}{0,2} \overset{\cdot 10}{=} \frac{60}{2}$ Numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me 10.

$= 30$

b) $\frac{30}{0,1} \overset{\cdot 10}{=} \frac{300}{1}$ Numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me 10

$= 300$

c) $\frac{0,09}{0,01} \overset{\cdot 100}{=} \frac{9}{1}$ Numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me 100

$= 9$

ç) $2,5 : 0,05 = \frac{2,5}{0,05}$ Pjesëtimin e shënojmë si thyesë.

$\frac{2,5}{0,05} \overset{\cdot 100}{=} \frac{6}{0,2}$ Numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me 100

$= 50$

Detyra

Detyrat në vazhdim zgjidhi pa përdorim të kalkulatorit.

1. Njehso.

a) $\frac{6}{0,2}$ **b)** $\frac{16}{0,4}$ **c)** $\frac{12}{0,3}$ **ç)** $\frac{20}{0,1}$

d) $\frac{1,4}{0,7}$ **dh)** $\frac{0,04}{0,2}$ **e)** $\frac{1,8}{0,3}$ **ë)** $\frac{80}{0,4}$

2. Njehso.

a) $\frac{1,2}{0,02}$ **b)** $\frac{3,6}{0,09}$ **c)** $\frac{16}{0,08}$ **ç)** $\frac{0,8}{0,04}$

d) $\frac{1,6}{0,02}$ **dh)** $\frac{4}{0,05}$ **e)** $\frac{0,15}{0,05}$ **ë)** $\frac{14}{0,07}$

3. Njehso.

a) $\frac{1,2}{0,02}$ **b)** $\frac{3,6}{0,09}$ **c)** $\frac{16}{0,08}$ **ç)** $\frac{0,8}{0,04}$

d) $\frac{1,6}{0,02}$ **e)** $\frac{4}{0,05}$ **f)** $\frac{0,15}{0,05}$ **g)** $\frac{14}{0,07}$

4. Njehso.

a) 25 : 0,1 **b)** 1,6 : 0,4 **c)** 640 : 0,08 **ç)** 0,8 : 0,02

5. Aliu tha "2,5 : 0,5 është 0,5 ".

Çfarë gabimi ka bërë Aliu?

Si duhet të jetë përgjigjja e saktë?

Në fillim njehso përgjigjen e saktë.

6. Maja ka kazan që përmban 140 litra ujë.

Ajo tha "Nëse prej kazani mbush 70 shishe, secila me vëllim 0,5 litra, atëherë kazani do të zbrazet".

Në fillim njehso zgjidhjen e saktë.

Çfarë gabimi ka bërë Maja?

Sa më së shumti shishe mund të mbushë prej këtij kazani?

Në fillim njehso përgjigjen e saktë.

7. **a)** 0,3 kg ari shitet për 712521 denarë.
Sa është çmimi i një kilogram ari?

b) 0,4 kg platin shitet për 980220 denarë.
Çështë më e shtrenjtë, 1 kg ari apo 1 kg platin? Shpjego procedurën.

Në fillim njehso sa kushton 1 kg platin.

8. Njehso.

a) 225 : 1,5 **b)** 125 : 2,5 **c)** 90 : 1,5

9. Një gyp është prerë në copa. Secila copë është e gjatë 0,25 metra.

Nëse gypi është i gjatë 4 metra, atëherë sa copë me gjatësinë e dhënë, mund të fitohen nga ky gyp?

1.5 Mbledhja dhe zbritja e thyesave

Thyesat ekuivalente

Thyesat $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ kanë vlerë të barabartë. Ato quhen thyesa **ekuivalente**.

Nëse **numëruesin** dhe **emëruesin** e një thyese i shumëzojmë me numër të njëjtë, do të fitojmë thyesë ekuivalente. Numëruesi është numri mbi vijën thyesore, kurse emëruesi është numri nën vijën thyesore.

Nëse në një thyesë pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me numër të njëjtë, do të fitojmë thyesë ekuivalente.

Mund të pjesëtojmë vetëm me pjesëtues të përbashkët të numëruesit dhe emëruesit.

Ky zakonisht quhet **thjeshtësim**, por nganjëherë **shkurtim**.

Atëherë kur nuk mundemi më tej ta thjeshtojmë thyesën, thuhet se thyesa është e **pathjeshtueshme**, respektivisht thyesa është në formën më të thjeshtë të saj.

Shembulli 1

Thjeshto thyesën deri në thyesë të pathjeshtueshme: $\frac{28}{32}$

$$\frac{28}{32} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{14}{16} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{7}{8}$$

Këtë mund ta bëjmë në një hap të vetëm nëse numëruesi dhe emëruesi pjesëtohen me 4.

$$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

Thyesën nuk mundemi më tepër ta thjeshtojmë. Tanimë është thyesë e pathjeshtueshme.

Mbledhja e thyesave

Thyesat duhet të kenë emërues të njëjtë që të mundemi t'i mbledhim.

Nëse thyesat nuk kanë emërues të njëjtë, veprojmë në këtë mënyrë:

E caktojmë shumëfishin më të vogël të përbashkët të emërueseve.

E shkruajmë secilën nga thyesat me këtë emërues.

I mbledhim të dy thyesat.

E thjeshtojmë zgjidhjen, nëse ajo është e mundur.

Një mënyrë e mbledhjes së **numrave të përzier** është se veçmas t'i mbledhim numrat e plotë, e veçmas thyesat e rregullta. Gjithashtu mund t'i mbledhim numrat e përzier, nëse në fillim i shndërrojmë në thyesa të parregullta dhe pastaj e zbatojmë mënyrën tashmë të njohur për mbledhje të thyesave.

Numri i përzier është i përbërë prej numrit të plotë dhe thyesës së rregullt.

Shembulli 2

Njehso: $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave 6 dhe 8 është 24.

$$\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{20}{24} \qquad \frac{7}{8} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{21}{24}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24}$$

$$= \frac{20 + 21}{24}$$

$$= \frac{41}{24}$$

$$= 1\frac{17}{24}$$

Shembulli 3

Njehso: $1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}$

$1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}=1+2+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$ I shqyrtojmë pjesët e plota nga thyesat e rregullta.

$=3+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}$ I mbledhim të gjitha pjesët, kurse thyesat e drejta i shkruajmë me numërues të njëjtë.

$=3+\frac{41}{24}$ I mbledhim thyesat e rregullta.

$=3+1+\frac{17}{24}$ Thyesën e padrejtë e shkruajmë si shumë e tërë pjesës dhe thyesën e drejtë.

$=4\frac{17}{24}$

Zbritja e thyesave

Zbritjen e thyesave e kryejmë ngjashëm sikur mbledhjen e thyesave.

Nëse thyesat nuk kanë emërues të njëjtë, veprojmë në këtë mënyrë:

E caktojmë shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve.

E shkruajmë secilën thyesë me atë emërues.

I zbresim të dy numëruesit.

E thjeshtojmë zgjidhjen, nëse ajo është e mundur.

Kur zbresim numra të përzier, një nga mënyrat është ato t'i shkruajmë si **thyesa të parregullta**.

Thyesa është e parregullt nëse numëruesi është më i madh se emëruesi.

Shembulli 4

Njehso: $1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$

$1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$ Numrin e përzier e shkruajmë si thyesë të parregullt.

$\frac{3}{2}\overset{\cdot 5}{=}\frac{15}{10}$ $\quad$ $\frac{4}{5}\overset{\cdot 2}{=}\frac{8}{10}$ Shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave 2 dhe 5 është 10.

$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{10}-\frac{8}{10}$

$=\frac{15-8}{10}$

$=\frac{7}{10}$ I zbresim numëruesit.

Shembulli 5

Njehso: $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5}$

$3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5} = \frac{13}{4} - \frac{7}{5}$ Numrat e përzier i shkruajmë si thyesa të parregullta.

$\frac{13}{4} \overset{\cdot 5}{=} \frac{65}{20}$ $\frac{7}{5} \overset{\cdot 4}{=} \frac{28}{20}$ Shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave 4 dhe 5 është 20.

$\frac{13}{4} - \frac{7}{5} = \frac{65}{20} - \frac{28}{20}$

$= \frac{65 - 28}{20}$

$= \frac{37}{20}$ I zbresim numëruesit.

$= 1\frac{17}{20}$ Thyesën e parregullt e shkruajmë si numër të përzier.

Detyra

1. Shkruaji thyesat si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{4}{24}$ **b)** $\frac{16}{52}$ **c)** $\frac{12}{99}$ **ç)** $\frac{18}{32}$

2. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ **c)** $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ **ç)** $1\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3}$

3. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{7}{8} - \frac{5}{16}$ **b)** $\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$ **c)** $2\frac{3}{8} - \frac{2}{3}$ **ç)** $2\frac{4}{9} - \frac{7}{12}$

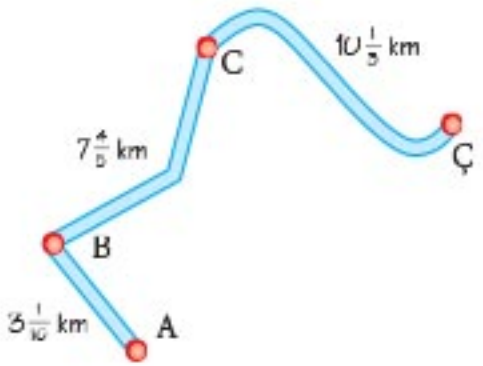
4. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{11}{18} + \frac{7}{24}$ **b)** $\frac{13}{36} + \frac{11}{20}$ **c)** $\frac{7}{24} - \frac{5}{30}$ **ç)** $\frac{8}{15} - \frac{7}{27}$

5. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $3\frac{5}{12} + 4\frac{11}{18}$ **b)** $7\frac{17}{24} + 3\frac{15}{32}$ **c)** $5\frac{7}{18} - 2\frac{11}{12}$ **ç)** $4\frac{11}{24} - 1\frac{13}{18}$

6. Nikolla nget biçikletën nga vendi A deri në vendin Ç. Ai gjatë udhëtimit u ndal në vendet B dhe C.



Sa kilometra rrugë gjithsej ka kaluar Nikolla? Zgjidhjen shkruaje si thyesë të pathjeshtueshme.

7. Kavanozi përplot me marmelatë ka masën e përgjithshme $\frac{9}{20}$ kg.
Vetëm marmelata ka masë $\frac{7}{24}$ kg.
Sa është masa e kavanozit?

8. Njehso thyesat që mungojnë.
a) $2\frac{5}{12} + ? = 4\frac{5}{16}$ **b)** $5\frac{7}{12} - ? = \frac{11}{18}$

Në fillim shkruaj thyesat si thyesa të parregullta.

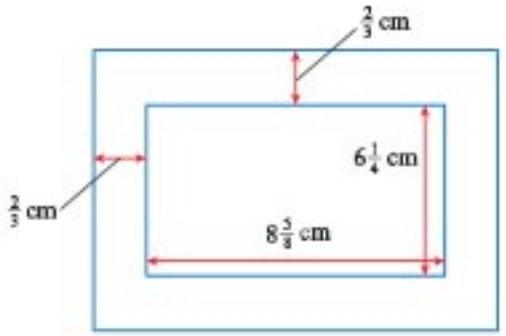
9. **a)** Numrat $\frac{1}{2}$, a, $\frac{3}{4}$ janë radhitur në renditje rritëse.
Vlera e a është saktë në mesin ndërmjet $\frac{1}{2}$ dhe $\frac{3}{4}$.
Njehsoje vlerën e a.

Përdor thyesa ekuivalente.

b) Numrat $\frac{1}{2}$, m, n, $\frac{3}{4}$ janë radhitur në renditje rritëse.
Ndryshimet ndërmjet cilado dy numra fqinjë janë të barabarta.
Njehso vlerat e m dhe n.

10. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.
a) $1\frac{2}{5} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30}$ **b)** $1\frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{7}{12}$ **c)** $1\frac{3}{5} + 2\frac{5}{6} + \frac{8}{15}$
ç) $4\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{7}{20}$ **d)** $3\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6} - \frac{14}{15}$ **dh)** $4\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{5}{6}$

11. Fotografia drejtkëndëshe është e gjatë $6\frac{1}{4}$ cm dhe e gjerë $8\frac{5}{8}$ cm.
a) Sa është perimetri i fotografisë?
b) Fotografia është vendos në kornizë me gjerësi $\frac{2}{3}$ cm.
Sa është perimetri i kornizës?



1.6 Shumëzimi i thyesave

Shumëzimi i numrit të plotë me thyesë

Prodhimi $3 \cdot \frac{4}{5}$ mund të shkruhet si $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$ respektivisht si $\frac{4+4+4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ Numri i plotë shumëzohet me thyesë ashtu që emëruesi mbet i njëjtë, kurse numëruesin e shumëzojmë me numrin e plotë.

Që të njehsojmë pjesë prej një vlere, pjesën ose thyesën e dhënë duhet ta shumëzojmë me atë vlerë. Të përkujtohemi se "prej" domethënë "shumëzo", sipas kësaj $\frac{2}{3}$ prej 36 domethënë $\frac{2}{3} \cdot 36$

Shembulli 1

Njehso: **a)** $\frac{5}{8} \cdot 36$ **b)** $\frac{7}{12}$ nga 18

a) $\frac{5}{8} \cdot 36 = \frac{180}{8}$

$= \frac{45}{2}$

$= 22\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{12} \cdot 18 = \frac{126}{12}$

$= \frac{21}{2}$

$= 10\frac{1}{2}$

Nëse fillimisht shumëzojmë, mund të paraqiten numra të mëdhenj. Që t'i shmangim numrat e mëdhenj, fillimisht thjeshtojmë, kurse pastaj shumëzojmë.

a) $\frac{5}{\cancel{8}_{2}} \cdot \overset{9}{\cancel{36}} = \frac{45}{2}$ thjeshtojmë me 4

$= 22\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{\cancel{12}_{\ 2}} \cdot \overset{3}{\cancel{18}} = \frac{21}{2}$ thjeshtojmë me 6

$= 10\frac{1}{2}$

Shumëzimi i thyesave

Prodhimi i dy thyesave është thyesë numëruesi i së cilës është i barabartë me prodhimin e numëruesve të atyre thyesave, kurse emëruesi është i barabartë me prodhimin e emëruesve të tyre.

Që t'i shmangim numrat e mëdhenj, para shumëzimit kryejmë thjeshtimin, sikur në shembullin 2.

Kur shumëzojmë numra të përzier, në fillim duhet t'i shkruajmë si thyesa të parregullta.

Shembulli 2

Njehso prodhimet. Zgjidhjet shënoj si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$ **b)** $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28}$

a) $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{8}_{4}} = \frac{5}{12}$ Shkurtojmë deri 2.

b) $\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\cancel{12}_{4}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{28}_{4}} = \frac{1}{16}$ Shkurtojmë me 7, prandaj shkurtojmë me 3.

Shembulli 3

Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shkruaji si numra të përzier.

a) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7}$ **b)** $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10}$

a) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7} = \frac{21^{3}}{1\,8} \cdot \frac{16^{2}}{7_{1}} = \frac{6}{1} = 6$

b) $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10} = \frac{^{12}24}{7_{1}} \cdot \frac{21^{3}}{10_{5}} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$

Detyra

1. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $\frac{2}{3}$ nga 36 **b)** $\frac{3}{8}$ nga 24 **c)** $\frac{2}{5}$ nga 24 **ç)** $\frac{5}{12}$ nga 16

d) $\frac{3}{4} \cdot 24$ **dh)** $\frac{7}{8} \cdot 20$ **e)** $\frac{7}{15} \cdot 24$ **ë)** $\frac{5}{12} \cdot 28$

2. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}$ **b)** $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9}$ **c)** $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **ç)** $\frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9}$

3. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **b)** $2\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7}$ **c)** $\frac{25}{32} \cdot 3\frac{1}{5}$ **ç)** $1\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}$

d) $1\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **dh)** $\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{12}$ **e)** $\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8}$ **ë)** $2\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$

f) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$ **g)** $1\frac{1}{9} \cdot 2\frac{2}{5}$ **gj)** $1\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{5}$ **h)** $2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$

i) $2\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{25}$ **j)** $1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{11}{25}$ **k)** $4\frac{1}{6} \cdot 1\frac{13}{35}$ **l)** $1\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{5}$

4. Lejla udhëton 24 km deri në punë çdo ditë.

Ajo vozit biçikletën në $\frac{3}{5}$ e gjatësisë së rrugës, kurse pastaj vazhdon në këmbë.

Për sa kilometra është më e madhe rruga e kaluar me biçikletë prej rrugës së kaluar në këmbë?

5. Në një kuti ka 6 libra identik me kopertina të buta, secili me masë $\frac{3}{10}$ kg, dhe 5 libra identik me kopertina të forta, secili me masë $\frac{4}{5}$ kg. Kutia e zbrazët ka masë $2\frac{3}{8}$ kg. Sa është masa e përgjithshme e kutisë me gjithë librat në të?

Njehsoje masën e përgjithshme të librave me kopertina të forta dhe masën e përgjithshme të librave me kopertina të buta.

6. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$ **b)** $2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}$

1.7 Pjesëtimi i thyesave

Pjesëtimi i numrit të plotë me thyesë

Numër të plotë pjesëtojmë me thyesë ashtu që e shumëzojmë me thyesën reciproke të saj. Thyesa reciproke është thyesa e cila numëruesit dhe emëruesit do t'i zëvendësojnë vendet, respektivisht thyesën "do ta shndërrojmë më tej".

Shembulli 1

Njehso: $4 : \frac{2}{3}$

$$4 : \frac{2}{3} = \overset{2}{4} \cdot \frac{3}{\underset{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$$

$\frac{3}{2}$ është thyesë reciproke e $\frac{2}{3}$

Pjesëtimi i thyesës me thyesë

Një thyesë pjesëtojmë me tjetër thyesë ashtu që thyesa e parë shumëzohet me vlerën reciproke të thyesës së dytë.

Të përmendim se para pjesëtimit, numrat e përzier duhet t'i shkruajmë si thyesa.

Shembulli 2

Njehso: $2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4}$

$$2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4} = \frac{20}{7} : \frac{5}{4} = \frac{\overset{4}{20}}{7} \cdot \frac{4}{\underset{1}{5}} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$$

$\frac{4}{5}$ është thyesë reciproke e $\frac{5}{4}$

Detyra

1. Njehso.

a) $4 : \frac{1}{2}$ **b)** $3 : \frac{3}{4}$ **c)** $6 : \frac{3}{8}$ **ç)** $8 : \frac{2}{5}$

2. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.
Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{7}{10} : \frac{3}{5}$ **c)** $\frac{12}{19} : \frac{6}{7}$ **ç)** $\frac{16}{25} : \frac{8}{15}$

3. Njehso. Zgjidhjet shënoji si thyesa të pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet, thyesat e parregullta shënoji si numra të përzier.

a) $1\frac{7}{9} : 2\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{8}{15} : \frac{24}{25}$ **c)** $\frac{5}{18} : 2\frac{1}{12}$ **ç)** $1\frac{1}{15} : 1\frac{3}{5}$

d) $1\frac{7}{8} : 2\frac{1}{4}$ **dh)** $1\frac{1}{8} : 1\frac{1}{2}$ **e)** $1\frac{1}{20} : 2\frac{4}{5}$ **ë)** $1\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$

f) $3\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ **g)** $\frac{4}{9} : 2\frac{2}{3}$ **gj)** $2\frac{1}{10} : 2\frac{4}{5}$ **h)** $2\frac{2}{5} : \frac{8}{15}$

i) $2\frac{1}{4} : \frac{3}{10}$ **j)** $1\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$ **k)** $2\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9}$ **l)** $1\frac{11}{25} : 1\frac{1}{15}$

4. Një kuti e zbrazët ka masën $3\frac{3}{8}$ kg.

Një copë mjeti ka masën $1\frac{1}{8}$ kg.

Masën e kutisë duhet ta kyçësh vetëm njëherë.

Sa është numri më i madh i mjeteve që mund të vendosen në kuti?

Kutia mund të mbajë masë të përgjithshme, duke përfshirë përmbajtjen, më të vogël se 25 kg.

5. Njehso. Thjeshtoji përgjigjet aq sa është e mundur.

a) $2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} : 1\frac{3}{5}$ **b)** $1\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7} : 1\frac{1}{24}$

6. Një kuti ka 20 lodra identike.

Kutia e zbrazët ka masën $12\frac{1}{2}$ g.

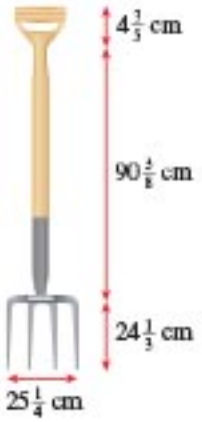
Secila lodër ka masën $5\frac{2}{5}$ g.

Sa është masa e përgjithshme e kutisë me lodrat në të?

7. Në vizatim është paraqitur sfurku kopshtar.

a) Sa është gjatësia e përgjithshme e tij?

b) Sa është distanca mes skajeve të dhëmbëzave fqinje?



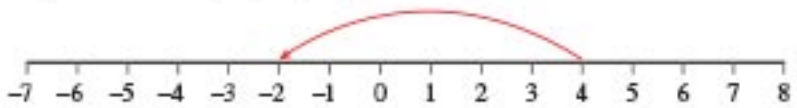
1.8 Numrat e plotë pozitivë dhe negativë

Mbledhja dhe zbritja

Numrat pozitivë dhe negativë i paraqesim në boshtin numerik, ashtu që majtë prej zeros janë numrat negativë, kurse djathtë prej zeros janë numrat pozitivë.

Boshtin numerik mund ta shfrytëzojmë për mbledhje dhe për zbritje të numrave pozitivë dhe negativë.

Në vizatim është paraqitur shuma (+4) + (-6)



Shigjeta e kuqe tregon se fillojmë prej +4 dhe lëvizim 6 hapa (njësi) në të majtë.

Për numra të plotë të vegjël mundemi ta shfrytëzojmë boshtin numerik.

Për numrat e tjerë i shfrytëzojmë rregullat për lirimin nga klapat:

+ + zëvendësohet me +	për shembull, −4 + (+6) zëvendësohet mee −4 + 6 = +2
+ − zëvendësohet me −	për shembull, −4 + (−6) zëvendësohet me −4 − 6 = −10
− + zëvendësohet me −	për shembull, −4 − (+6) zëvendësohet me −4 − 6 = −10
− − zëvendësohet me +	për shembull, −4 − (−6) zëvendësohet me −4 + 6 = +2

Shembulli 1

Njehso.

a) (+7,5) − (+12,2) **b)** (−8,1) + (+14,8) **c)** (−23,5) − (−17,8)

a) (+7,5) − (+12,2)

= +7,5 − 12,2 − + zëvendësohet me −

Numrat dhjetorë më vështirë mund t'i mbledhim përmes boshtit numerik.



Në vend të kësaj, shprehjen 7,5 − 12,2 e shkruajmë me numrat e kundërt të saj, 12,2 − 7,5.

Kalkulatorin e përdorim vetëm nëse punojmë me numra shumë të mëdhenj.

12,2 − 7,5 = 4,7

Sipas kësaj, 7,5 − 12,2 = −4,7

12,2
− 7,5
4,7

b) (−8,1) + (+14,8)

= −8,1 + 14,8 + + zëvendësohet me +

= 14,8 − 8,1

= 6,7

c) (−23,5) − (−17,8)

= −23,5 + 17,8 − − zëvendësohet me +

= − (23,5 − 17,8) përdorim operacion invers

= −5,7

Shumëzimi dhe pjesëtimi

Rregullat për shumëzim dhe për pjesëtim të numrave pozitivë dhe negativë:

pozitiv dhe pozitiv = pozitiv

pozitiv dhe negativ = negativ

negativ dhe pozitiv = negativ

negativ dhe negativ = pozitiv

Rregullat shkurt i shkruajmë:

+ + = do të fitohet +
+ − = do të fitohet −
− + = do të fitohet −
− − = do të fitohet +

Rregulla elementare është e njëjtë si për shumëzimin ashtu edhe për pjesëtimin.

Nëse të dy shenjat janë të njëjta, rezultati është pozitiv.

Nëse të dy shenjat janë të ndryshme, rezultati është negativ.

Shembulli 2

Njehso. **a)** $-7 \cdot (+12)$ **b)** $-23{,}6 \cdot (-9)$ **c)** $(-63) : 9$ **ç)** $220{,}8 : (-12)$

a) Shenjat janë të ndryshme, prandaj rezultati do të jetë negativ.

Njehsojmë $7 \cdot 12 = 84$

Prandaj $-7 \cdot 12 = -84$

b) Shenjat janë të njëjta, prandaj rezultati do të jetë pozitiv.

Njehsojmë $23{,}6 \cdot 9 = 212{,}4$

Prandaj, $-23{,}6 \cdot (-9) = 212{,}4$

$$\begin{array}{r} 23{,}6 \\ \cdot\quad 9 \\ \hline 212{,}4 \\ \hline 3\ 5 \end{array}$$

c) Shenjat janë të ndryshme, prandaj rezultati do të jetë negativ.

Dimë se $63 : 9 = 7$

Prandaj, $-63 : 9 = -7$

ç) Shenjat janë të ndryshme, prandaj rezultati do të jetë negativ.

Njehsojmë $220{,}8 : 12 = 18{,}4$

Prandaj, $220{,}8 : (-12) = -18{,}4$

$$\begin{array}{r} 220{,}8 : 12 = 18{,}4 \\ -12 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 48 \\ -48 \\ \hline 0 \end{array}$$

Shembulli 3

Njehso: **a)** $(-4) \cdot (+8) \cdot (-10)$ **b)** $(-6)^2$

a) Kur në shprehje ka më tepër se dy numra, atëherë duhet që njehsimi të kryhet sipas radhitjes së shkruar.

Për më lehtë, mund të shkruajmë në kllapa.

$(-4) \cdot (+8) \cdot (-10)$

$= ((-4) \cdot (+8)) \cdot (-10)$

$= (-32) \cdot (-10)$

$= 320$

Nëse kemi numër çift të shenjave negative, rezultati do të jetë pozitiv.

Nëse kemi numër tek të shenjave negative, rezultati do të jetë negativ

b) $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

Kur caktojmë katrorin e numrit negativ, rezultati është pozitiv.

Detyra

Njehso:

1. $(-2{,}5) + (+8{,}5)$ **2.** $3 + (-9)$ **3.** $(-6{,}4) - (+9)$

4. $6{,}2 - (-8{,}5)$ **5.** $(-13) + (-14)$ **6.** $(-8) + (+28)$

7. $(-5{,}8) - (-7{,}8)$ **8.** $0{,}5 + (+1{,}5)$ **9.** $(-3{,}9) + (+4{,}9)$

10. $(-5{,}2) + (-4{,}8)$ **11.** $7{,}6 - (+5{,}3)$ **12.** $3 - (+13{,}6)$

13. $15{,}3 + (-12{,}2)$ **14.** $(-12{,}8) - (+13{,}8)$ **15.** $(-21) - (-26{,}9)$

16. $(-13{,}7) + (-16{,}8)$ **17.** $-9 \cdot (+8)$ **18.** $-7 \cdot (-6)$

19. $+9{,}2 \cdot (-5)$ **20.** $-4{,}3 \cdot (-8)$ **21.** $+16{,}3 \cdot (+5)$

22. $-17{,}2 \cdot (+3)$ **23.** $+25{,}8 \cdot (-2)$ **24.** $-16{,}4 \cdot (-10)$

25. $-72 : 8$ **26.** $-48 : (-6)$ **27.** $128 : (-8)$

28. $-354 : (-6)$ **29.** $18{,}7 : (-11)$ **30.** $-650 : (-10)$

31. $-65{,}1 : 7$ **32.** $-89{,}5 : (-5)$ **33.** $(-3)^2$

34. $(-8)^2$ **35.** $(-10)^2$ **36.** $-5 \cdot (-4) \cdot 6$

37. $-4 \cdot (-2) \cdot (-7)$ **38.** $9 \cdot (-3) \cdot (-10)$ **39.** $-3 \cdot 8 \cdot (-4) \cdot (-10)$

40. $(-2)^3$ $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

Detyra për përsëritje

1. Rrumbullako numrat në numër të caktuar vendesh dhjetore.

a) 2,58 në 1 v.dh. **b)** 2,68961 në 2 v.dh. **c)** 2,089 në 1 v.dh.

ç) 8,99 në 1 v.dh. **d)** 2,034 në 1 v.dh.

2. Rrumbullako numrat sipas numrit të dhënë të shifrave të rëndësishme.

a) 458 në 2 sh.r. **b)** 2,35841 në 3 sh.r. **c)** 0,0258 në 1 sh.r.

ç) 99,8 në 2 sh.r. **d)** 99,8 në 1 sh.r.

3. Njehso.

a) $60 \cdot 300$ **b)** $5000 \cdot 20$ **c)** $300 \cdot 0{,}8$ **ç)** $250 \cdot 0{,}2$

d) $0{,}35 \cdot 0{,}2$ **dh)** $0{,}08 \cdot 0{,}04$ **e)** $0{,}24 \cdot 0{,}6$ **ë)** $6000 \cdot 0{,}09$

4. Shkruaji shprehjet në formë fuqie.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ **b)** $12 \cdot 12 \cdot 12$ **c)** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

ç) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

5. Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet paraqiti në formë të fuqisë.

a) $4^2 \cdot 4^4$ **b)** $5^8 : 5^3$ **c)** $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6$ **ç)** $(10^2)^3$

d) $(5^3)^4$ **dh)** $x^4 \cdot x^3 : x$ **e)** $y^5 : y^3 \cdot y^2$ **ë)** $x^4 \cdot x^3 : x^1$

6. Thjeshtoji shprehjet dhe pastaj njehsoje vlerën e tyre.

a) $8^{-5} \cdot 8^7$ **b)** $(5^2)^3 : 5^4$ **c)** $9 : 3^2$ **ç)** $16 \cdot 2^{-3}$

7. Njehso:

a) $\frac{2}{0{,}4}$ **b)** $\frac{16}{0{,}8}$ **c)** $\frac{14{,}4}{0{,}9}$ **ç)** $\frac{1{,}8}{0{,}6}$ **d)** $\frac{6{,}3}{0{,}07}$

dh) $\frac{1{,}5}{0{,}01}$ **e)** $\frac{0{,}8}{0{,}02}$ **ë)** $\frac{0{,}18}{0{,}03}$ **f)** $3 : 0{,}1$ **g)** $20 : 0{,}01$

8. Njehso:

a) $4{,}5 \cdot 10^2$ **b)** $450 \cdot 10^{-1}$ **c)** $508 \cdot 10^{-3}$ **ç)** $0{,}0054 \cdot 10^3$

d) $0{,}0492 \cdot 10^{-1}$ **dh)** $42 : 10^2$ **e)** $589 : 10^1$ **ë)** $0{,}05 : 10^{-3}$

f) $0{,}0089 : 10^{-2}$ **g)** $0{,}025 : 10^{-3}$

9. Caktoje vlerën e:

a) 6^2 **b)** $(-8)^2$ **c)** 15^2 **ç)** $(-17)^2$

d) 1^5 **dh)** 12^0 **e)** 5^{-2} **ë)** 6^{-1}

10. Njehso. Zgjidhjet paraqiti si thyesa të pathjeshtueshme.

a) $\frac{13}{20} + \frac{11}{18}$ **b)** $\frac{5}{12} - \frac{3}{20}$ **c)** $3\frac{25}{32} + 4\frac{7}{24}$ **ç)** $4\frac{7}{27} - 2\frac{11}{18}$

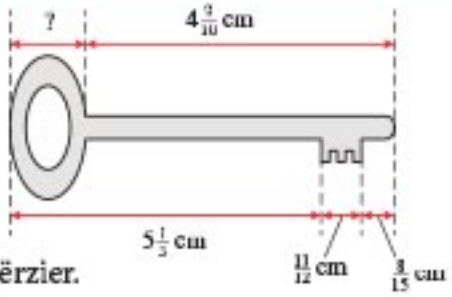
11. Elena në këmbë kaloi $\frac{4}{5}$ km deri në stacionin e autobusëve.

Pastaj me autobus kaloi $4\frac{2}{3}$ km.

Në fund, në këmbë deri te shkolla ajo kaloi edhe $\frac{7}{12}$ km.

Sa km gjithsej ka udhëtuar Elena?

12. Përdori gjatësitë e paraqitura në figurë për të gjetur:



a) gjatësinë e përgjithshme të çelësit.

b) gjatësinë e "kokës" së çelësit.

13. Njehso. Zgjidhjet paraqiti në formë të thyesës së pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet thyesat e parregullta paraqiti si numra të përzier.

a) $\frac{4}{15} \cdot \frac{9}{16}$ **b)** $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **c)** $\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{16}$

ç) $2\frac{7}{10} \cdot 2\frac{7}{9}$ **d)** $4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{28}$ **dh)** $2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{11}{25}$

14. Njehso. Zgjidhjet paraqiti në formë të thyesës së pathjeshtueshme.

Në zgjidhjet thyesat e parregullta paraqiti si numra të përzier.

a) $1\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{4}{5} : \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$

ç) $4\frac{2}{3} : \frac{7}{9}$ **d)** $2\frac{5}{8} : 1\frac{5}{16}$ **dh)** $1\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3}$

2 Algjebra dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- E di prejardhjen e fjalës "algjebër" dhe ndërlidhja e saj me matematikanin arab Al-Kuarizmi.
- Përdor shënim të fuqive me eksponent numër të plotë pozitiv; zbaton rregulla për pjesëtim dhe shumëzim të fuqive në transformim të shprehjeve algjebrike.
- Thjeshtëson apo transformon shprehje algjebrike përmes nxjerrjes së monomit para kllape si shumëzues i përbashkët.
- Mbledh dhe zbrit thyesa algjebrike të thjeshta.
- Formulon dhe zgjidh barazime lineare me koeficient numër të plotë (me ose pa kllapa, shenja negative në barazim, zgjidhje pozitive ose negative); zgjidh probleme me numra me formulim dhe zgjidhje të barazimeve lineare.
- Përpilon shprehje algjebrike.
- Gjen funksion invers të funksionit linear.
- Gjeneron anëtarë të vargut duke përdorur rregullën për caktim të anëtarit të ardhshëm dhe caktimin e cilitdo anëtari të vargut duke përdorur anëtarin e përgjithshëm.
- Nxjerr shprehje për ta përshkruar anëtarin e *n*-të të vargut aritmetik.

Al-Kuarizmi

Muhamed ibn Musa Al-Kuarizmi është matematikan i njohur arab i lindur rreth vitit 783.

Ai shkroi mjaft libra. Në libër me titull "Doracak për njehsime dhe metoda e ekuilibrit" ai e përdor fjalën "al-xhabr" që do të thotë zbritje të numrit nga të dy anët e një barazimi.

Nga fjala "al-xhabr" rrjedh edhe fjala "algjebër" që bota e përdor edhe sot.

Kopja e vetme arabe e këtij libri ruhet në Oksford, kurse përkthimi i saj në latinisht ruhet në Kembrixh.

Në figurë është paraqitur pulla postare në të cilën është emri i tij dhe teksti "1200 vite". Ajo pullë postare ishte prodhuar në vitin 1983 për nderë të lindjes së tij para 1200 viteve.



2.1 Thjeshtimi i fuqive

Mundemi të shënojmë $a \cdot a \cdot a \cdot a$ si a^4 — treguesi i fuqisë(eksponenti); baza

kurse $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$ si y^7

$3x \cdot 2x \cdot 5x$ si $3 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 5 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$

$= 30 \cdot x^3$

$= 30x^3$

$\frac{2x}{6}$ mundemi ta shënojmë si $\frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3}$ që mund të thjeshtohet deri në $\frac{x}{3}$

Shembulli 1

Thjeshtoji **shprehjet**. **a)** $5a \cdot a \cdot 2a$ **b)** $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y$

a) $5a \cdot a \cdot 2a = 5 \cdot a \cdot a \cdot 2 \cdot a$

$= 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a$

$= 10a^3$

b) $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot x \cdot 4 \cdot y$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

$= 24x^2y^2$

Shembulli 2

Thjeshtoji shprehjet: **a)** $\frac{12x}{3y}$ **b)** $\frac{5x^2}{10xy}$

a) $\frac{12x}{3y} = \frac{3 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot y}$ pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me 3.

$= \frac{4x}{y}$

b) $\frac{5x^2}{10xy} = \frac{5 \cdot x \cdot x}{2 \cdot 5 \cdot x \cdot y}$ pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me 5 dhe me x.

$= \frac{x}{2y}$

Detyra

1. Thjeshto:

a) $3x \cdot 4x$ **b)** $5x \cdot x$ **c)** $2y \cdot y \cdot 3y$

ç) $2a \cdot 3a \cdot 4a$ **d)** $2b \cdot 3b \cdot b \cdot 4b \cdot b$ **dh)** $4p \cdot p \cdot 3p \cdot p \cdot p$

2. Thjeshto:

a) $5a \cdot a \cdot 2b$ **b)** $2p \cdot 3q \cdot p \cdot 4q \cdot p$ **c)** $7x \cdot 3y \cdot 2x$

ç) $2x \cdot 3y \cdot 4y \cdot 5x$ **d)** $6a \cdot b \cdot a \cdot 7ab$ **dh)** $x \cdot 8xy \cdot 2xy \cdot 3x$

3. Thjeshto:

a) $\frac{5x}{10}$ **b)** $\frac{6y}{8}$ **c)** $\frac{8a}{12}$ **ç)** $\frac{14x}{21}$ **d)** $\frac{6x}{4}$

dh) $\frac{5x}{x^2}$ **e)** $\frac{3x^2}{12x}$ **ë)** $\frac{12xy}{8x}$ **f)** $\frac{6y}{y^2}$ **g)** $\frac{2xy}{y^2}$

gj) $\frac{7x}{14y}$ **h)** $\frac{9xy}{3xyz}$ **i)** $\frac{8ab^2}{b}$ **j)** $\frac{2xy}{6x^2y^2}$ **k)** $\frac{2a^2b}{5ab^2}$

4. Shkruaji numrat si fuqi me bazë 2, respektivisht në formën 2^x. (Për shembull, $16 = 2^4$)

a) 32 **b)** 8 **c)** 4 **ç)** 64 **d)** 256

5. Shkruaji numrat në formën x^y. (Për shembull, $125 = 5^3$)

a) 49 **b)** 27 **c)** 10000 **ç)** 169 **d)** 243

6. Zgjidhi barazimet.

Barazimi i parë është zgjidhur si shembull.

a) $2^x = 8$ Shkruaje numrin 8 si fuqi me bazë 2.

$2^x = 2^3$ Bazat janë të barabarta, prandaj edhe treguesit e tyre patjetër duhet të jenë të barabartë.

$x = 3$

b) $2^x = 64$ **c)** $3^x = 9$ **ç)** $10^x = 100$ **d)** $5^x = 125$ **dh)** $2^x = 256$

e) $4^x = 64$ **ë)** $2^x = 512$ **f)** $3^x = 27$ **g)** $2^x = 16$ **gj)** $3^x = 81$

7. Zgjidhi barazimet.

Barazimi i parë është zgjidhur si shembull.

a) $5^{x+1} = 125$ Shkruaje numrin 125 si fuqi me bazë 5.

$5^{x+1} = 5^3$ Bazat janë të barabarta, prandaj edhe treguesit e tyre patjetër të jenë të barabartë.

$x + 1 = 3$ Zbrit 1 në të dy anët.

$x = 2$

b) $2^{2x} = 64$ **c)** $2^{x+1} = 16$ **ç)** $2^{x-1} = 8$ **d)** $5^{x-2} = 125$ **dh)** $3^{x-1} = 81$

e) $2^{x-2} = 128$ **ë)** $2^{2x+1} = 32$ **f)** $5^{x-1} = 125$ **g)** $3^{2x+1} = 27$ **gj)** $10^{3x} = 1000000$

2.2 Rregullat për operacionet me fuqi me baza të barabarta

Tri rregullat në vijim janë të njohura si rregulla për operacionet me fuqi me baza të barabarta.

Shumëzimi i fuqive me baza të barabarta

Ta shqyrtojmë prodhimin $2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$

Nëse barazojmë fillimin dhe fundin e barazimit, fitojmë: $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

RREGULLA 1 $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Pjesëtimi i fuqive me baza të barabarta

Ta shikojmë pjesëtimin $4^5 : 4^3 = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 4\cdot 4}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}} = 4^2$

Nëse barazojmë fillimin dhe fundin e barazimit, fitojmë: $4^5 : 4^3 = 4^{5\ -\ 3} = 4^2$

RREGULLA 2 $x^a : x^b = x^{a-b}$

Fuqizimi i fuqisë

Ta shqyrtojmë fuqinë: $(5^2)^3 = (5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5) = 5^6$

Nëse barazojmë fillimin dhe fundin e barazimit, fitojmë: $(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$

RREGULLA 3 $(x^a)^b = x^{a\cdot b}$

Shembulli 1

Thjeshto: **a)** $y^3\cdot y^4$ **b)** $a^5 : a^3$ **c)** $(f^3)^4$

a) $y^3\cdot y^4 = y^{3+4}$ i mbledhim treguesit e fuqive.
$= y^7$

b) $a^5 : a^3 = a^{5-3}$ i zbresim treguesit e fuqive.
$= a^2$

c) $(f^3)^4 = f^{3\cdot 4}$ i shumëzojmë treguesit e fuqive.
$= f^{12}$

Shembulli 2

Thjeshto: **a)** $5xy^2\cdot 2x^2y^5\cdot 7x^3y^4$ **b)** $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2}$

a) $5xy^2\cdot 2x^2y^5\cdot 7x^3y^4 = 5\cdot 2\cdot 7\cdot x^1\cdot x^2\cdot x^3\cdot y^2\cdot y^5\cdot y^4$
$= 70\cdot x^{1+2+3}\cdot y^{2+5+4}$
$= 70x^6y^{11}$

b) $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2} = \frac{2}{6}\cdot(x^7 : x^3)\cdot(y^8 : y^2)$
$= \frac{1}{3}\cdot x^{7-3}\cdot y^{8-2}$
$= \frac{x^4y^6}{3}$

Detyra

Thjeshtoji shprehjet:

1. a) $x^3\cdot x^2$ **b)** $y^2\cdot y^4$ **c)** $a^8\cdot a$ **ç)** $p^4\cdot p^7$

d) $f\cdot f^3$ **dh)** $y^3\cdot y^3$ **e)** $q^6\cdot q^3$ **ë)** $d^4\cdot d^8$

2. **a)** $2x^3 \cdot 3x^4$ **b)** $4y^5 \cdot 2y^3$ **c)** $3a^4 \cdot 5a^2$ **ç)** $4f^2 \cdot f^5$

d) $5y^3 \cdot 5y^3$ **dh)** $4d \cdot 3d^5$ **e)** $7e^8 \cdot 4e^6$ **ë)** $9c^4 \cdot 4c^9$

3. **a)** $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$ **b)** $y^6 \cdot y \cdot y^2$ **c)** $2a^3 \cdot 5a^2 \cdot 3a^4$ **ç)** $8d^4 \cdot d \cdot 2d^8$

4. **a)** $x^7 : x^2$ **b)** $x^8 : x^4$ **c)** $a^8 : a^5$ **ç)** $p^6 : p$

5. **a)** $\frac{16x^7}{4x^5}$ **b)** $\frac{8x^6}{16x^2}$ **c)** $\frac{3a^5}{12a^2}$ **ç)** $\frac{2y^8}{8y^2}$

d) $\frac{5y^7}{15y^4}$ **dh)** $\frac{12w^6}{18w^2}$ **e)** $\frac{25a^8}{50a^3}$ **ë)** $\frac{18g^5}{27g^2}$

6. **a)** $\frac{x^4 \cdot x^3}{x^5}$ **b)** $\frac{y^8 \cdot y^8}{y^7}$ **c)** $\frac{x^{10}}{x^2 \cdot x^4}$ **ç)** $\frac{a^4 \cdot a^7}{a^2 \cdot a^3}$

d) $\frac{2x^2 \cdot 3x^5}{4x^3}$ **dh)** $\frac{3y^4 \cdot 6y^3}{2y^5}$ **e)** $\frac{8x^9}{2x^3 \cdot 2x^4}$ **ë)** $\frac{2a^5 \cdot 5a^2}{3a \cdot 4a^4}$

7. **a)** $(y^3)^2$ **b)** $(x^4)^3$ **c)** $(x^2)^6$ **ç)** $(a^4)^4$ $(y^3)^2$ domethënë $y^3 \cdot y^3$

8. **a)** $(2x^3)^2$ **b)** $(3a^2)^4$ **c)** $(10y^4)^3$ **ç)** $\left(\frac{h^3}{2}\right)^2$ $(2x^3)^2$ domethënë $2x^3 \cdot 2x^3$

2.3 Zbërthimi në shumëzues

Në klasën VIII e mësuam mënyrën **për lirim nga kllapat.**

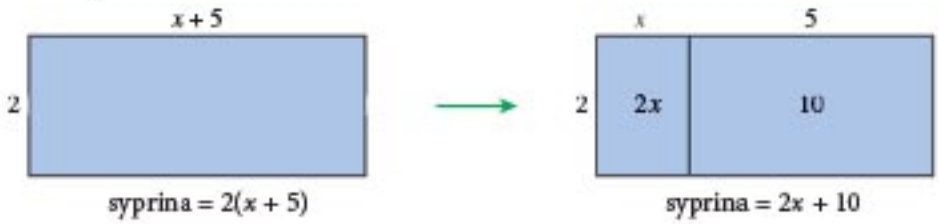
Domethënë shprehja $2(x+5)$ mund të shkruhet si $2x + 10$.

Këtë mund ta shpjegojmë në dy mënyra të ndryshme.

Mënyra e parë

Me vizatim.

Syprina e drejtkëndëshit me brinjët 2 dhe $x + 5$ mund të njehsohet me ndarje të drejtkëndëshit në dy pjesë siç është treguar në vizatim.



Prandaj, $2(x + 5) = 2x + 10$.

Mënyra e dytë

Me shumëzim.

$2(x + 5) = 2 \cdot x + 2 \cdot 5$

$= 2x + 10$

Çdo anëtar në kllapa shumëzohet me 2.

Zbërthimi në shumëzues është mënyra inverse e mënyrës së lirimit nga kllapat. Me këtë mënyrë të gjithë shumëzuesit e përbashkët të anëtarëve duhet t'i nxjerrim para kllape. Prandaj, shprehjen $2x + 10$ e shkruajmë si $2(x + 5)$.

Kur ndonjë shprehje duhet ta zbërthejmë në shumëzues, e rëndësishme është tërësisisht ta zbërthejmë në shumëzues.

Për shembull, $12x + 8 = 2(6x + 4)$ është vetëm zbërthim i pjesshëm në shumëzues.

Me zbërthim të tërësishëm fitojmë $12x + 8 = 4(3x + 2)$.

Shembulli

Zbërtheji në shumëzues shprehjet: **a)** $30x + 12$ **b)** $3x^2 - 9xy$ **c)** $6xy^2 + 8x^2y^3$

a) $30x + 12$
$= 6(5x + 2)$

6 është pjesëtuesi më i madh i përbashkët (PMP) i të dy anëtarëve.
$30x = 6 \cdot 5x$ dhe $12 = 6 \cdot 2$.
Duhet ta kontrollojmë rezultatin nëpërmjet lirimit nga kllapat.
Kontrollim: $6(5x + 2) = 6 \cdot 5x + 6 \cdot 2 = 30x + 12$.

b) $3x^2 - 9xy$
$= 3x(x - 3y)$

3 është PMP i të dy anëtarëve.
$3x^2 = 3x \cdot x$ dhe $9xy = 3x \cdot 3y$.
Kontrollim: $3x(x - 3y) = 3x \cdot x - 3x \cdot 3y = 3x^2 - 9xy$.

c) $6xy^2 + 8x^2y^3$
$= 2xy^2(3 + 4xy)$

$2xy^2$ është PMP i të dy anëtarëve.
$6xy^2 = 2xy^2 \cdot 3$ dhe $8x^2y^3 = 2xy^2 \cdot 4xy$.
Kontrollim: $2xy^2(3 + 4xy) = 2xy^2 \cdot 3 + 2xy^2 \cdot 4xy = 6xy^2 + 8x^2y^3$.

Detyra

1. Liroju prej kllapave në shprehjet.

a) $8(x + 7)$ **b)** $3(5 - y)$ **c)** $7(9y - 2)$ **ç)** $x(x - 2)$

d) $y(3y + 8)$ **dh)** $2x(5 - 4x)$ **e)** $2xy(3 - y)$ **ë)** $5x^2(3 - 2x)$

2. Përshkruaj dhe plotëso.

a) $8x + 10 = 2(4x + \square)$ **b)** $6x - 9 = 3(2x - \square)$ **c)** $21x + 14 = 7(3x + \square)$

ç) $18x + 27 = 9(\square + 3)$ **d)** $24y + 40 = \square(3y + \square)$ **dh)** $54 - 42x = \square(9 - \square)$

3. Në detyrën e shtëpisë Andreu duhej të zbërthejë në shumëzues disa shprehje.
Ai bëri disa gabime.

a) $12y - 8 = 4(3y - 4)$

b) $30x + 15 = 5(6x + 3)$

c) $4x - 10 = 4(x - 2{,}5)$

Përshkruaj detyrat dhe përmirësoji gabimet e bëra.

Në detyrat **4**, **5**, **6**, **7** dhe **8** zbërtheji në shumëzues shprehjet.

4. **a)** $3x + 6$ **b)** $7y - 14$ **c)** $8x + 24$ **ç)** $9y + 12$

d) $3x - 15$ **dh)** $16y - 12$ **e)** $30x + 14$ **ë)** $20 - 16x$

f) $42 + 21y$ **g)** $60 - 45x$ **gj)** $38 - 19y$ **h)** $144 - 108x$

5. **a)** $x^2 + 4x$ **b)** $y^2 - 5y$ **c)** $x^2 - 10x$ **ç)** $2a^2 - 4a$

d) $x^2 + 9x$ **dh)** $8x - 3x^2$ **e)** $10y - 2y^2$ **ë)** $16x - 12x^2$

f) $14x - 7x^2$ **g)** $6x + 4x^2$ **gj)** $12y^2 - 9y$ **h)** $72x^2 - 54x$

6. **a)** $6\pi + 2$ **b)** $24 - 16\pi$ **c)** $\pi r + 2r$ **ç)** $\pi r^2 + 2\pi rh$

7. **a)** $2x + 4y + 6z$ **b)** $9x^2 + 6x + 3$ **c)** $8a - 12b + 30c$ **ç)** $12x^3 + 6x^2 - 3x$

8. **a)** $xy + x^2$ **b)** $2x^2 + 6xy$ **c)** $8x^2y - 4xy$ **ç)** $10x^3y^2 - 15x^3y$

d) $16xy^3 - 24x^3y$ **dh)** $24a^2b + 16ab$ **e)** $45x^5y - 54x^2y$ **ë)** $8x^6y^4 - 6x^5y^2$

9. Thyesat algjebrike mund t'i thjeshtojmë me zbërthim në shumëzues të numëruesit dhe emëruesit, kurse pastaj me thjeshtim të pjesëtuesve të përbashkët të numëruesit dhe emëruesit.

Për Shembulli,

$$\frac{6x + 18}{24} = \frac{6 \cdot (x + 3)}{6 \cdot 4} = \frac{x + 3}{4} \quad \text{dhe} \quad \frac{x^2 - 2x}{xy} = \frac{x \cdot (x - 2)}{x \cdot y} = \frac{x - 2}{y}$$

Thjeshto thyesat e dhëna.

a) $\frac{4x + 2}{10}$ **b)** $\frac{9x - 6}{12}$ **c)** $\frac{6x + 12}{8}$ **ç)** $\frac{24 - 16y}{20}$

d) $\frac{5a + 5b}{5c}$ **dh)** $\frac{8x - 4y}{16z}$ **e)** $\frac{3x + 3}{x^2 + x}$ **ë)** $\frac{5x}{x^2 - 5x}$

2.4 Mbledhja dhe zbritja e thyesave algjebrike

Rregullat për mbledhje dhe për zbritje të thyesave algjebrike janë të njëjta sikur rregullat për mbledhje dhe për zbritje të thyesave numerike.

Rasti 1

Emëruesit e thyesave janë të barabarta:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Ngjashëm, $\frac{2x}{7} + \frac{3x}{7} = \frac{5x}{7}$.

Rasti 2

Emëruesit e thyesave janë të ndryshme:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

Duhet t'i sjellim thyesat në emërues të njëjtë të përbashkët (ShVP). Në këtë rast ai është 12.

Ngjashëm, $\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{8x}{12}+\frac{3x}{12}$

$$=\frac{11x}{12}$$

Shembulli

Shkruaji shprehjet vijuese si një thyesë.

a) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}$ **b)** $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}$ **c)** $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}$ **ç)** $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$

a) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}=\frac{7}{y}$

Emëruesit janë të barabartë.

b) $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}=\frac{25x}{20}-\frac{8x}{20}$
$=\frac{17x}{20}$

Duhet t'i sjellim thyesat në emërues të njëjtë, në këtë rast ai është 20.

c) $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}=\frac{4}{6x}+\frac{1}{6x}$
$=\frac{5}{6x}$

Duhet t'i sjellim thyesat në emërues të njëjtë, në këtë rast ai është $6x$.

ç) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3y}{xy}+\frac{2x}{xy}$
$=\frac{3y+2x}{xy}$

Duhet t'i sjellim thyesat në emërues të njëjtë, në këtë rast ai është xy.

Detyra

1. Shkruaji shprehjet vijuese si një thyesë.

a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}$ **b)** $\frac{2x}{5}+\frac{x}{5}$ **c)** $\frac{x}{7}+\frac{3x}{7}$ **ç)** $\frac{x}{5}+\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{2x}{9}+\frac{2x}{9}$

dh) $\frac{x}{8}-\frac{y}{8}$ **e)** $\frac{5x}{7}-\frac{2x}{7}$ **ë)** $\frac{x}{7}-\frac{2}{7}$ **f)** $\frac{5}{x}+\frac{2}{x}$ **g)** $\frac{7}{y}-\frac{3}{y}$

gj) $\frac{x}{y}+\frac{2}{y}$ **h)** $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}$ **i)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{4}$ **j)** $\frac{5x}{6}-\frac{x}{6}$ **k)** $\frac{8}{9xy}-\frac{2}{9xy}$

2. Teodora shkroi:

$\frac{x}{8}+\frac{2x}{3}=\frac{3x}{11}$

Shpjego ku gaboi dhe njehso zgjidhjen e saktë.

3. Shkruaji shprehjet e dhëna si një thyesë.

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ **b)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$ **c)** $\frac{y}{3}-\frac{y}{4}$ **ç)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}$ **d)** $\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}$

dh) $\frac{5x}{8}-\frac{x}{2}$ **e)** $\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}$ **ë)** $\frac{5y}{7}-\frac{y}{2}$ **f)** $\frac{3x}{8}+\frac{x}{3}$ **g)** $\frac{2y}{3}+\frac{y}{6}$

4. Përcakto shprehjen e cila dallohet nga të tjerat.

$\frac{x}{6}+\frac{5x}{12}$ $\frac{5x}{6}-\frac{x}{4}$ $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$ $\frac{x}{6}+\frac{3x}{4}$ $\frac{2x}{3}-\frac{x}{12}$

Shprehjet në detyrat **5**, **6** dhe **7** shënoji si një thyesë.

5. **a)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$ **b)** $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}$ **c)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}$ **ç)** $\frac{5x}{6}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{3}$

6. **a)** $\frac{1}{2x}+\frac{3}{x}$ **b)** $\frac{2}{3y}+\frac{1}{y}$ **c)** $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2x}$ **ç)** $\frac{3}{xy}+\frac{2}{y}$

7. **a)** $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{2}$ **b)** $\frac{x+2}{3}+\frac{x+7}{4}$ **c)** $\frac{x-8}{4}+\frac{x+2}{5}$ **ç)** $\frac{x-4}{3}-\frac{x-5}{7}$

2.5 Barazimet lineare

Të rikujtohemi si zgjidhen **barazimet**.

Shembulli 1

Zgjidhe barazimin: $\frac{x}{2}-4=12$

$\frac{x}{2}-4=12$ Shtojmë 4 në të dy anët.

$\frac{x}{2}=16$ Të dy anët i shumëzojmë me 2.

$x=32$

Shembulli 2

Zgjidhe barazimin: $3(2x+5)=2(2x-7)+25$

$3(2x+5)=2(2x-7)+25$ Lirohemi prej kllapave.

$6x+15=4x-14+25$ I mbledhim anëtarët e ngjashëm.

$6x+15=4x+11$ Zbresim $4x$ në të dy anët.

$2x+15=11$ Zbresim 15 në të dy anët.

$2x=-4$ Të dy anët i pjesëtojmë me 2.

$x=-2$

Për ta zgjidhur barazimin $\frac{x+1}{4} = \frac{x+8}{5}$, duhet t'i shumëzojmë të dy anët e barazimit me shumëfishin më të vogël të përbashkët (ShVP) të numrave 4 dhe 5, respektivisht të shumëzojmë me 20.

$20 \cdot \frac{(x+1)}{4} = 20 \cdot \frac{(x+8)}{5}$ — Thjeshtojmë $20 : 4 = 5$ dhe $20 : 5 = 4$

$5(x+1) = 4(x+8)$ — Lirohemi prej kllapave.

$5x + 5 = 4x + 32$ — Zbresim $4x$ nga të dy anëve.

$x + 5 = 32$ — Zbresim 5 nga të dy anët.

$x = 27$

Nëse në dy anët e barazimit ka nga një thyesë, atëherë mund të shfrytëzojmë mënyrën më të shpejtë.

$\frac{x+1}{4} = \frac{x+8}{5}$ — Shumëzojmë kryq.

$5(x+1) = 4(x+8)$ — Lirohemi nga kllapat.

$5x + 5 = 4x + 32$ — Zbresim $4x$ nga dy anët.

$x + 5 = 32$ — Zbresim 5 nga dy anët.

$x = 27$

Detyra

1. Zgjidhi barazimet.

a) $3x + 2 = 23$ **b)** $2x - 1 = -9$ **c)** $5x - 3 = 27$ **ç)** $4x + 7 = 17$

d) $\frac{x+2}{5} = 4$ **dh)** $\frac{2x-3}{4} = -2$ **e)** $\frac{x}{3} - 2 = 2$ **ë)** $\frac{x}{5} + 6 = -2$

f) $15 - 2x = 9$ **g)** $30 - 4x = 24$ **gj)** $3(2x - 7) = -27$ **h)** $2(5 - 2x) = 16$

2. Zgjidhi barazimet.

a) $2(x + 3) + 4(2x - 1) = 22$ **b)** $3(2x - 2) + 5(x + 6) = 13$

c) $4(3x + 2) - 3(2x - 1) = 35$ **ç)** $5(2x - 3) - 2(3x + 5) = -23$

d) $5x + 4 = 4x + 7$ **dh)** $7x - 2 = 5x + 5$

e) $8x + 1 = 5x - 8$ **ë)** $2x - 5 = 7 - x$

f) $3(x + 1) = 2x - 8$ **g)** $2 + 4(x - 3) = 2x + 7$

gj) $12 - 2x = 20 - 5x$ **h)** $3(2x + 7) + 2 = 4(x - 8)$

3. Zgjidhi barazimet.

a) $\frac{2x-5}{2} = \frac{x+1}{8}$ **b)** $\frac{x-1}{2} = \frac{2x+10}{12}$ **c)** $\frac{4x+7}{3} = \frac{8x+9}{5}$ **ç)** $\frac{2x+2}{6} = \frac{x+5}{5}$

d) $\frac{3x-2}{7} = \frac{x-2}{3}$ **dh)** $\frac{4x-3}{9} = \frac{3x-4}{5}$ **e)** $\frac{2x+1}{2} = \frac{5x+7}{4}$ **ë)** $\frac{3x-8}{6} = \frac{x-2}{3}$

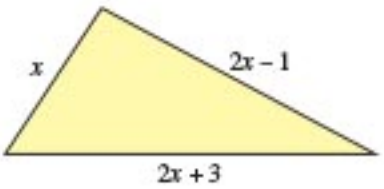
4. Amiri paramendoi një numër.

I shtoi 5, kurse pastaj e pjesëtoji me 7.

Rezultati i njëjtë fitohet nëse zbret 1 nga numri i menduar dhe pastaj pjesëton me 4.

Cili është numri që paramendoi Amiri?

5. Perimetri i trekëndëshit të dhënë është 15 cm.



a) Shkruaj barazim sipas ndryshores x, për njehsim të perimetrit të trekëndëshit.

b) Zgjidhe barazimin nën **a)** që ta gjesh vlerën e x.

6. Shprehja A është për 7 më e vogël se shprehja B.

A $25 - 2x$ B $3(x + 4)$

Njehsoje vlerën e ndryshores x.

7. Zgjidhi barazimet.

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14$ **b)** $\frac{2x}{3} - \frac{x}{5} = 21$ **c)** $\frac{6x}{7} - \frac{x}{3} = 22$ **ç)** $\frac{2x}{9} - \frac{x}{2} = 10$

2.6 Formulimi i shprehjeve algjebrike

Shembulli 1

Formulo shprehje me të cilën do të njehsosh syprinën e drejtkëndëshit.



syprina = baza · lartësia përkatëse

$= (x + 8)(x - 3)$

$= x^2 - 3x + 8x - 24$

$= x^2 + 5x - 24$

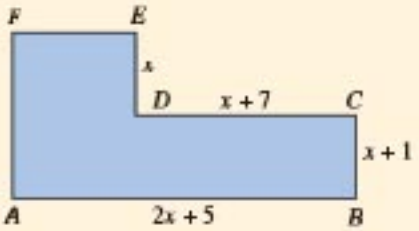
Shembulli 2

Sipas të dhënave në vizatim, shkruaj (formulo) shprehje me të cilën do të njehsosh:

a) gjatësinë e brinjës $\overline{EF}$

b) gjatësinë e brinjës $\overline{AF}$

c) Perimetri i 2D-formës $ABCDEF$.



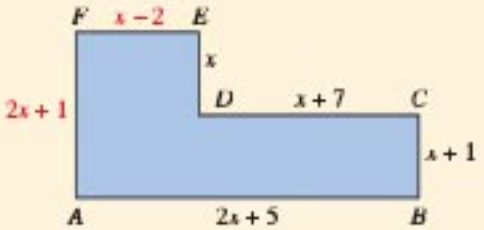
a) $\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{DC} = (2x + 5) - (x + 7)$

$= 2x + 5 - x - 7$

$= x - 2$

b) $\overline{AF} = \overline{BC} + \overline{DE} = x + 1 + x$

$= 2x + 1$



c) perimetri $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA}$

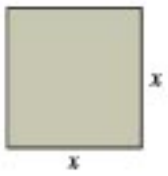
$= (2x + 5) + (x + 1) + (x + 7) + x + (x - 2) + (2x + 1)$

$= 8x + 12$

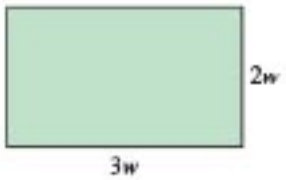
Detyra

1. Sipas të dhënave të vizatimeve, shkruaj shprehje për perimetrin e secilës nga 2D-format.
Thjeshtoji shprehjet e fituara.

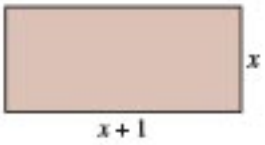
a)



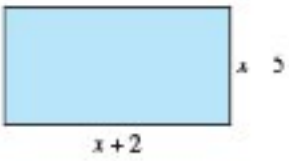
b)



c)

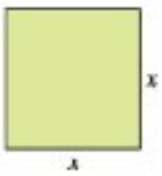


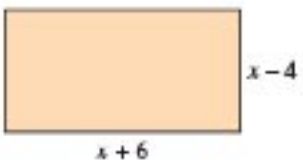
ç)



2. Shkruaj shprehje për syprinën e çdo nga 2D-format e detyrës **1**.
Thjeshtoji shprehjet e fituara.

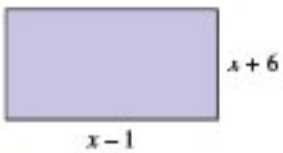
3.





Katrori dhe drejtkëndëshi kanë syprina të barabarta. Njehsoje vlerën e ndryshores x.

4.

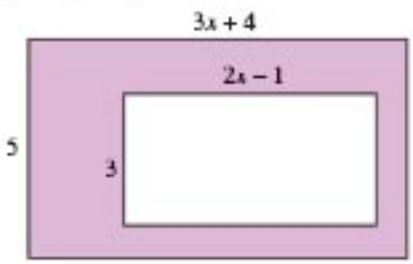




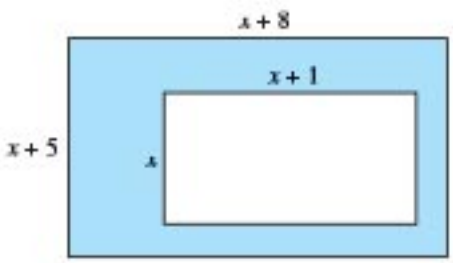
Formulo shprehje me të cilën do të njehsohet syprina e përgjithshme e të dy drejtkëndëshave.
Thjeshtoji shprehjet e fituara.

5. Shkruaj shprehje të njehsimit të syprinës së sipërfaqes së ngjyrosur në 2D-format e dhëna.
Thjeshtoji shprehjet e fituara.

a)



b)



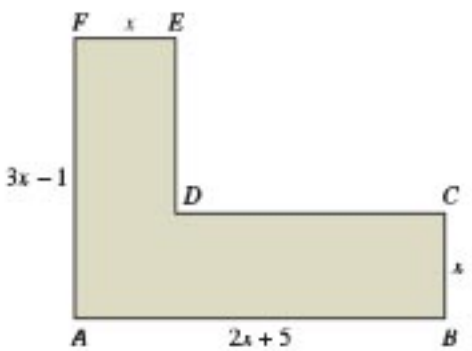
6. Sipas të dhënave në vizatim, formulo shprehje me të cilën do të njehsosh:

a) gjatësinë e brinjës $\overline{DC}$

b) gjatësinë e brinjës $\overline{DE}$

c) perimetrin e figurës $ABCDEF$

ç) syprina e 2D-formës $ABCDEF$.



7.



Sipas të dhënave te vizatimi, formulo shprehje për njehsim të syprinës së kuadrit të dhënë.

8. **a)** Elena nget biçikletën x km me shpejtësi mesatare 20 km/h.

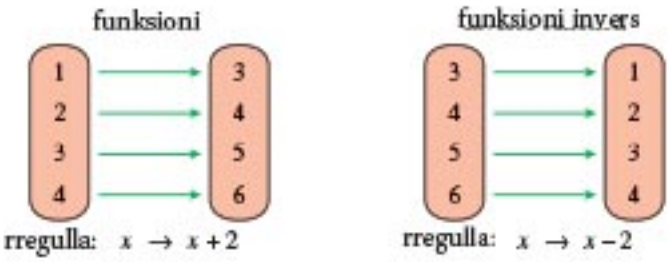
Formulo shprehje, në lidhje me ndryshoren x, për kohën që është e nevojshme që Elena të kalojë tërë rrugën me shpejtësinë e njëjtë.

b) Elena pastaj nget biçikletën edhe $2x$ km me shpejtësi mesatare 30 km/h.

Formulo shprehje, në lidhje me x, për kohën e përgjithshme, në orë, që i është e nevojshme Elenës për t'i kryer të dy etapat e udhëtimit dhe trego se ajo thjeshtohet deri më $\frac{7x}{60}$.

2.7 Funksioni invers

Te diagramet janë paraqitur funksioni "shtojmë 2" dhe **funksioni invers** i saj "zbresim 2".



Funksioni invers është funksion që i zbaton operacionet inverse të operacioneve në funksionin origjinal.

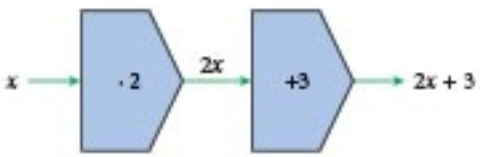
Ngjashëm, funksion invers i $x \to 3x$ është funksioni $x \to \frac{x}{3}$

Atë mund ta shkruajmë në këtë mënyrë:

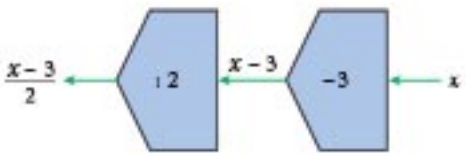
Inverse me funksionin $y = 3x$ është funksioni $y = \frac{x}{3}$

Mundemi të gjejmë funksionin invers të çdo funksioni të dhënë duke shfrytëzuar makinë funksionale inverse.

Makinë funksionale për funksionin $x \to 2x + 3$ është:

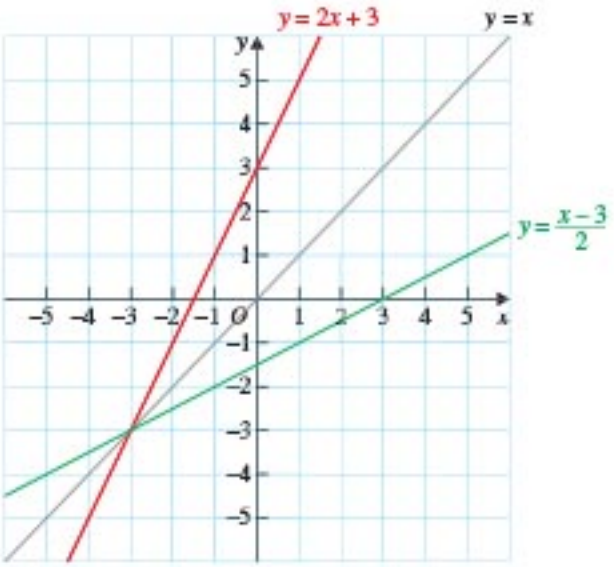


Makinë funksionale inverse është:



Prandaj, funksioni invers i funksionit $x \to 2x + 3$ është funksioni $x \to \frac{x-3}{2}$

Nëse i vizatojmë grafikët e funksionit $y = 2x + 3$ gj dhe funksionit invers të saj $y = \frac{x-3}{2}$ në sistem të njëjtë koordinativ, do të vërejmë lidhje të veçantë.

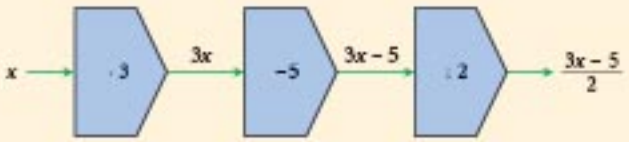


Grafikët e funksionit dhe funksioni i tij invers janë drejtëza simetrike njëra me tjetrin në lidhje me drejtëzën $y = x$.

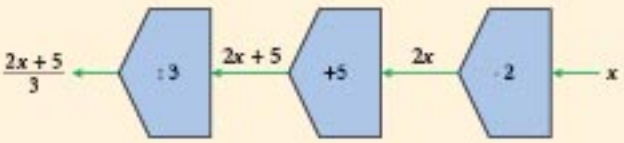
Shembulli 1

Cakto funksionin invers të funksionit $x \to \frac{3x-5}{2}$

Makina funksionale për funksionin është:



Makina funksionale inverse është:



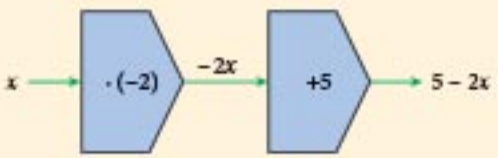
Prandaj, funksioni invers është $x \to \frac{2x+5}{3}$

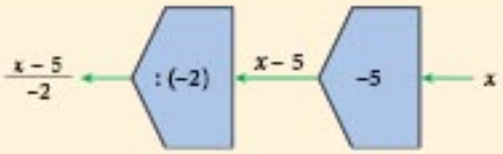
Shembulli 2

Cakto funksionin invers të funksionit: $x \to 5 - 2x$

Në fillim e shkruajmë funksionin si $x \to -2x + 5$

Rregulla e funksionit është "shumëzojmë me -2" dhe pastaj "shtojmë 5".





Prandaj, funksioni invers është $x \to \frac{x-5}{-2}$, që mund ta thjeshtojmë deri në $x \to \frac{5-x}{2}$

Detyra

1. Shkruaj funksionin invers të secilit funksion.

a) $x \to 2x$ **b)** $x \to x+3$ **c)** $x \to x-6$ **ç)** $x \to \frac{x}{5}$

2. Me makinën funksionale gjeje funksionin invers të funksioneve të dhëna:

a) $x \to 3x+1$ **b)** $x \to 5x-3$ **c)** $x \to 4x+3$ **ç)** $x \to 7x-1$

d) $x \to 2(x+3)$ **dh)** $x \to 4(x-7)$ **e)** $x \to \frac{x+2}{4}$ **ë)** $x \to \frac{x-8}{3}$

f) $x \to \frac{x}{4}-2$ **g)** $x \to \frac{x}{6}+5$ **gj)** $x \to \frac{3x+1}{2}$ **h)** $x \to \frac{2x-3}{5}$

i) $x \to 5(2x-1)$ **j)** $x \to \frac{2x}{3}+1$ **k)** $x \to \frac{4x+7}{2}$ **l)** $x \to \frac{3x-4}{7}$

3. Cakto inversen për secilin funksion:

a) $x \to 7-x$ **b)** $x \to 8-2x$ **c)** $x \to 15-3x$ **ç)** $x \to \frac{3-2x}{4}$

4. Marku ka detyrë ta gjejë funksionin invers të funksionit $x \to 2x-5$

Ai shkroi:

Nëse i përmbahem hapave vijues, do të gjejë funksionin invers:

Hapi 1 Shkruaj funksionin si: $y = 2x - 5$

Hapi 2 Ndërroji vendet e x dhe y $x = 2y - 5$

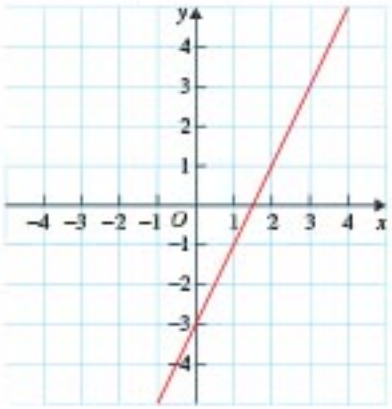
Hapi 3 Shprehe y: $y = \frac{x+5}{2}$

Hapi 4 Shkruaj funksionin invers: $x \to \frac{x+5}{2}$

Përdore këtë metodë për caktim të funksionit invers për funksionet:

a) $x \to 2x-9$ **b)** $x \to 4x+2$ **c)** $x \to \frac{2x-1}{4}$ **ç)** $x \to \frac{3-2x}{5}$

5. Kryeje grafikun dhe vizatoje grafikun e funksionit invers të funksionit të dhënë.



2.8 Rregulla për caktimin e anëtarit të ardhshëm të vargut

Vargu është listë numrash ose formash që janë të lidhura me rregull të caktuar.

8, 2, -4, -10,... është varg linear.

E quajmë **varg linear** (ose **varg aritmetik**) pasi dallimi (diferenca) ndërmjet çfarëdo dy anëtarëve fqinjë të vargut është i njëjtë.



Rregulla për caktimin e anëtarit të ardhshëm në vargun, është "-6" ose "zbresim 6".

Vargu 3, 6,11, 18, 27,... quhet **varg jolinear** pasi që dallimi (ndryshimi) ndërmjet çfarëdo dy anëtarëve fqinjë të vargut nuk është i njëjtë.



Diferencat mes anëtarëve fqinjë formojnë varg të ri numerik.

Mund ta përdorim vargun nga diferencat për t'i gjetur anëtarët e ardhshëm në varg.



Shembulli 1

15, 18, 21, 24, ...

Shëno: **a)** rregullën për caktimin e anëtarit të ardhshëm **b)** dy anëtarët e ardhshëm të vargut

a) 

Rregulla e vargut është "shtojmë 3".

b) 

Dy anëtarët e ardhshëm të vargut janë 27 dhe 30.

Shembulli 2

12, 17, 25, 36, 50, ...

Shkruaj dy anëtarët e ardhshëm të vargut.

Në fillim e shqyrtojmë skemën numerike të dallimeve (diferencave) dhe pastaj shfrytëzojmë këtë skemë për t'i shkruar dy anëtarët e ardhshëm.



Dy anëtarët të ardhshëm të vargut të dhënë janë 67 dhe 87.

Detyra

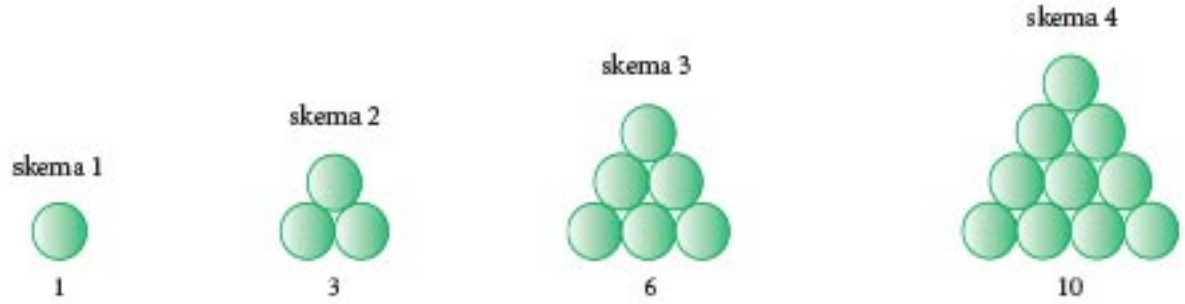
1. Për secilin varg shkruaj: **i** rregullën për caktim të anëtarit të ardhshëm të vargut
ii tre anëtarët e ardhshëm

a) 3, 5, 7, 9, …
b) 7, 11, 15, 19, …
c) 1, 6, 11, 16, …
ç) 7; 8,5; 10; 11,5; …
d) 16, 13, 10, 7, …
dh) 5, −4, −13, −22, …
e) 1, 3, 9, 27, …
ë) 1, 10, 100, 1000, …
f) 32, 16, 8, 4, …

2. Shqyrto diferencat mes anëtarëve fqinj për secilin nga vargjet e dhëna dhe shkruaj tre anëtarët e ardhshëm:

a) 1, 2, 4, 7, 11, …
b) 5, 6, 9, 14, 21, …
c) 2, 5, 11, 20, 32, …
ç) 4, 9, 19, 34, 54, …
d) 20, 19, 17, 14, 10, …
dh) −4, −2, 2, 8, 16, …

3. Vizatimet më poshtë tregojnë si formohen katër numrat trekëndor të parë.



a) shkruaj tre numra trekëndor të ardhshëm.

b) përshkruaje tabelën në fletore dhe plotëso.

Skema	1	2	3	4	5	6	7
Numri i rrathëve	$1-\frac{1\cdot 2}{2}$	$3-\frac{2\cdot 3}{2}$	$6-\frac{3\cdot 4}{2}$	$10-\frac{4\cdot 5}{2}$			

c) Shfrytëzo skemat në tabelën nën **b)** për të shkruar formulë për gjetje të numrit trekëndor të n-të.

ç) Shfrytëzoje zgjidhjen nën **c)** për ta gjetur numrin trekëndor të njëqindtë.

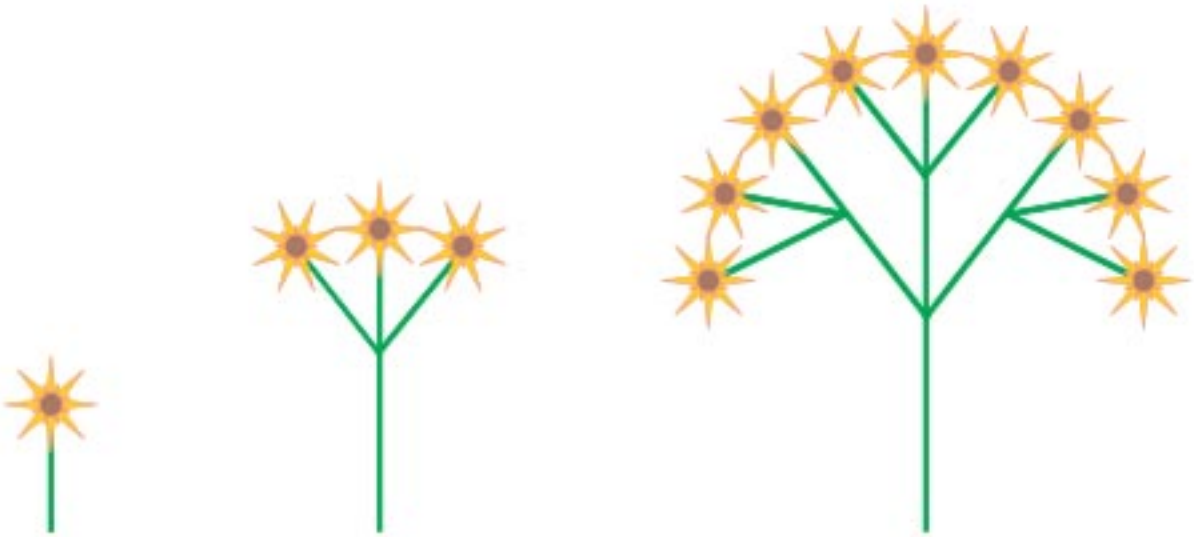
4. Vargu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... quhet vargu i Fibonaçit.

Çdo anëtar i vargut të Fibonaçit, përveç dy të parëve, është shumë e dy anëtarëve paraprak të vargut.

Shkruaj tre anëtarët e ardhshëm për secilin nga vargjet e dhëna me rregull të njëjtë sikur vargu i Fibonaçit:

a) 5, 7, 12, 19, 31, …
b) 2, 2, 4, 6, 10, 16, …
c) 3, −4, −1, −5, −6, …

5. Në vizatim është treguar rritja e një bime gjatë tre viteve.
Secilin vit lulja zëvendësohet me tri degë dhe tri lule tjera.



viti 1 viti 2 viti 3

Përshkruaje tabelën dhe plotëso.

Viti	1	2	3	4	5
Numri i luleve	1	3	9		
Numri i degëve	1	4			

6. Te vizatimi është paraqitur vargu numerik:



vizatimi 1 vizatimi 2 vizatimi 3 vizatimi 4

Në vizatimet mund të vërejmë si është formuar vargu:

vizatimi 1: $1 = 1 = 1^2$

vizatimi 2: $1 + 3 = 4 = 2^2$

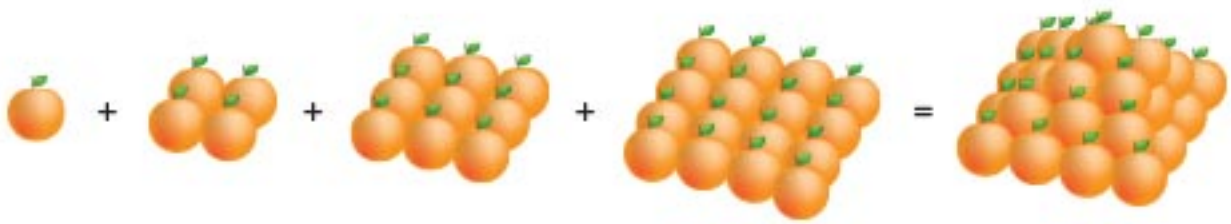
vizatimi 3: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

vizatimi 4: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

a) Shkruaj dy rreshtat e ardhshëm të këtij vargu numerik.

b) Shfrytëzo skemat numerike për të caktuar shumën e 20 numrave të parë tek.

7. Në vizatim është treguar si formohet piramida nga portokajtë.



Kjo piramidë ka katër nivele. Numri i portokajve në piramidë = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.

a) Sa portokaj ka në piramidën me tre nivele?

b) Sa portokaj ka në piramidën me pesë nivele?

c) Sa portokaj ka në piramidën me gjashtë nivele?

8. Është dhënë vargu: 83, 39, 42, 23, ...

Rregulla për gjetje të anëtarit të ardhshëm të vargut është "shumëzo shifrat e numrit të fundit dhe pastaj shto 15".

a) Shkruaj 10 anëtarët e parë të vargut.

b) Cili është anëtari i pesëdhjetë i vargut?

9. Është dhënë vargu numerik:

Rreshti 1: $1^3 = 1 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$

Rreshti 2: $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2$

Rreshti 3: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

Rreshti 4: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = \left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right)^2$

a) Shkruaj dy rreshtat e ardhshëm të këtij vargu numerik.

b) Shkruaj formulë për shumën e n numrave të parë kubik?

10. Marku e shqyrton vargun Fibonaçi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Ai e shqyrtoi herësin e anëtarëve fqinjë.

Çdo herës të tillë e shënoji në formën 1 : n.

Herësi i numrit të parë dhe numrit të dytë është 1 : 1

Herësi i numrit të dytë dhe numrit të tretë është 1 : 2

Herësi i numrit të tretë dhe numrit të katërt është 2 : 3 = 1 : 1,5

Herësi i numrit të katërt dhe numrit të pestë është 3 : 5 = 1 : 1,666...

a) Cakto gjashtë herësit e ardhshëm dhe përshkruaj çfarë formojnë ata numra.

b) Në internet kërko më tepër informacione për këtë "herës të artë" i cili po ashtu njihet edhe me emrin "proporcion i artë".

11.



vizatimi 1



vizatimi 2



vizatimi 3



vizatimi 4

Në vizatimet janë treguar katër hapat e parë në të vizatuarit e fjollës së Koh-it.

Fjolla e Koh-it është skemë fraktale.

a) Në internet kërko më tepër informacione për trekëndëshin e Serpinskit.

Vizato katër vizatimet e para për trekëndëshin Serpinski. A ka lidhshmëri fjolla e Koh-it me trekëndëshin e Serpinskit?

b) Me ndihmë të internetit mëso edhe skema tjera fraktale.

2.9 Rregulla për caktimin e anëtarit të *n*-të te vargut

Që t'i gjejmë numrat në një varg, mund ta përdorim edhe rregullën për **caktim të anëtarit të *n*-të të vargut.**

Nëse kjo rregull e vargut është: anëtari = 3 · numri rendor i anëtarit, pastaj shtojmë 5, atëherë katër anëtarët e parë janë:

anëtari 1 $= 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$

anëtari 2 $= 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

anëtari 3 $= 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$

anëtari 4 $= 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$

Rregullën mund ta shkruajmë edhe me formulë: anëtari i n-të $= 3n + 5$.

Shembulli 1

Rregulla për gjetje të anëtarit të n-të të vargut është: anëtari i n-të $= 7n - 2$.

a) Shkruaj katër anëtarët e parë të vargut.

b) Cili anëtar i vargut ka vlerën 327?

a) anëtari 1 $= 7 \cdot 1 - 2 = 7 - 2 = 5$

anëtari 2 $= 7 \cdot 2 - 2 = 14 - 2 = 12$

anëtari 3 $= 7 \cdot 3 - 2 = 21 - 2 = 19$

anëtari 4 $= 7 \cdot 4 - 2 = 28 - 2 = 26$

Katër anëtarët e parë janë: 5, 12, 19, 26

b) Do ta zgjidhim barazimin $7n - 2 = 327$

$7n = 329$ Shtojmë 2 në dy anët.

$n = 47$ Dy anët i pjesëtojmë me 7.

Anëtari i 47-të ka vlerën 327.

Shembulli 2

Rregulla për gjetje të anëtarit të n-të të vargut është: anëtari i n-të $= 2n^2 + 5$.

Shkruaj katër anëtarët e parë të vargut.

anëtari $1 = 2 \cdot 1^2 + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

anëtari $2 = 2 \cdot 2^2 + 5 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

anëtari $3 = 2 \cdot 3^2 + 5 = 2 \cdot 9 + 5 = 23$

anëtari $4 = 2 \cdot 4^2 + 5 = 2 \cdot 16 + 5 = 37$

Katër anëtarët e parë janë: 7, 13, 23 dhe 37.

Detyra

1. Shkruaj katër anëtarët e parë të vargut linear anëtari i n-të i të cilit është:

a) $n + 2$ **b)** $3n - 1$ **c)** $5n + 3$ **ç)** $2n + 5$

d) $4n - 3$ **dh)** $40 - n$ **e)** $80 - 5n$ **ë)** $5 - 3n$

f) $0{,}5n + 3$ **g)** $12 - 0{,}5n$ **gj)** $\frac{2n-7}{2}$ **h)** $\frac{6-5n}{4}$

2. Shkruaji të pesë anëtarët të vargut jolinear, anëtari i n-të është:

a) n^2 **b)** $n^2 + 2$ **c)** $n^2 - 1$ **ç)** $3n^2$

d) $n(n + 1)$ **dh)** $n^2 - 3n$ **e)** n^3 **ë)** $n^3 + 1$

f) $2n^3$ **g)** $n(n+ 1)(n + 2)$ **gj)** $\frac{n}{n+1}$ **h)** $\frac{n+5}{2n}$

3. Është dhënë vargu me: anëtari i n-të $= 6n + 3$.
Cili anëtar i vargut ka vlerën 405?

4. Është dhënë vargu me: anëtari i n-të $= 2n - 7$.
Cili anëtar i vargut ka vlerën 301?

5. Është dhënë vargu me: anëtari i n-të $= 10 - 4n$
Cili anëtar i vargut ka vlerën -258?

6. Është dhënë vargu me: anëtari i n-të $= \frac{5n+3}{2}$
Cili anëtar i vargut ka vlerën 374?

7. Është dhënë vargu me: anëtari i n-të $= n^2 + 4$.
Cili anëtar i vargut ka vlerën 488?

8. Është dhënë vargu me: anëtarin e n-të $= 2^n - 1$
Cili anëtar i vargut ka vlerën 511?

9.



Vargu nga vizatimet i paraqet katër anëtarët e parë të vargut prej katrorëve të plotë.

Rregulla për gjetje të anëtarit të n-të të katrorëve të plotë është: anëtari i n-të = n^2.

Secili nga vargu i dhënë është lidhur me vargun me katrorë të plotë.

Gjeje lidhjen dhe pastaj shkruaje rregullën për njehsim (gjetje) të anëtarit të n-të të vargut.

Shembulli i parë është i zgjidhur.

a) 4, 7, 12, 19, …

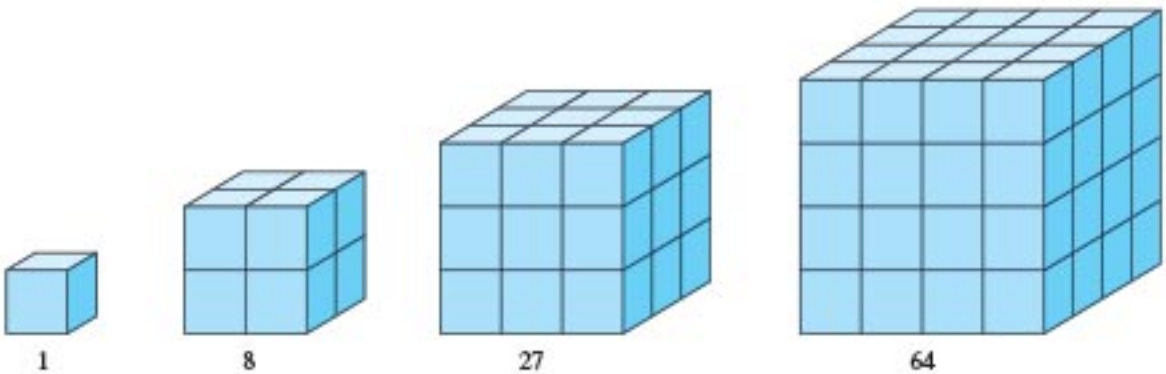
katrorë të plotë:	1	4	9	16	
	↓	↓	↓	↓	rregulla "shtojmë 3"
vargu:	4	7	12	19	

Prandaj, rregulla është: anëtari i n-të = $n^2 + 3$.

b) 2, 5, 10, 17, … **c)** 0, 3, 8, 15, … **ç)** 7, 10, 15, 22, …

d) 3, 6, 11, 18, … **dh)** 2, 8, 18, 32, … **e)** 1, 7, 17, 31, …

10.



Vargu i vizatimeve i paraqet të katër anëtarët e parë të vargut të kubeve të plotë.

Rregulla për caktim të anëtarit të n-të të vargut prej kubeve të plota është: anëtari i n-të= n^3.

Secili nga vargu i dhënë është i lidhur me vargun e kubeve të plotë.

Gjeje lidhjen dhe pastaj shkruaje rregullën për njehsim (gjetje) të anëtarit të n-të të vargut.

a) 2, 9, 28, 65, … **b)** 0, 7, 26, 63, … **c)** 6, 13, 32, 69, …

ç) 4, 11, 30, 67, … **d)** 2, 16, 54, 128, … **dh)** 3, 17, 55, 129, …

11. Vargu 2, 4, 8, 16,... është formuar në këtë mënyrë.

$2^1 = 2$ $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Pra, rregulla për anëtarin e n-të të vargut është: anëtari i n-të = 2^n.

Secili prej vargjeve të dhëna është disi i ndërlidhur me vargun 2, 4, 8, 16,...

Gjeje lidhjen dhe pastaj shkruaje rregullën për njehsim (gjetje) të anëtarit të n-të të vargut.

a) 3, 5, 9, 17, … **b)** 0, 2, 6, 14, … **c)** 4, 6, 10, 18, …

ç) 1, 3, 7, 15, … **d)** 6, 12, 24, 48, … **dh)** 7, 13, 25, 49, …

2.10 Anëtari i *n*-të i vargut aritmetik

Kur punojmë me vargje numerike shpesh kërkohet të gjejmë vlerën e anëtarit të caktuar të vargut.

Për shembull, të gjejmë anëtarin e 40-të të vargut: 3, 10, 17, 24, 31,...

Të shkruarit e vargut duke vazhduar deri te anëtari i kërkuar, nuk është metodë më e mirë e zgjidhjes.

Metoda më e mirë do të ishte nëse shfrytëzojmë rregullën për anëtarin e *n*-të të vargut.

Rregullën për **anëtarin e *n*-të** të vargut shpesh e shkruajmë në mënyrë algjebrike, me formulë për njehsim të anëtarit të *n*-të.

Që ta gjejmë këtë rregull, së pari i shqyrtojmë diferencat (ndryshimet) mes anëtarëve fqinjë të vargut.

Numri rendor, *n*	1	2	3	4	5
Anëtari	3	10	17	24	31
	+7	+7	+7	+7	

Në këtë rast, anëtarët rriten për 7.

Që ta gjemë pjesën tjetër të rregullit, duhet t'i krahasojmë anëtarët me tabelën e shumëzimit me 7.

Numri rendor, *n*	1	2	3	4	5	·7
Tabela e shumëzimit me 7	7	14	21	28	35	·(−4)
Anëtari	3	10	17	24	31	

Rregulla për anëtarin e *n*-të është:

anëtari = 7 · numri rendor i anëtarit minus 4

Në mënyrë algjebrike mund ta shkruajmë kështu:

anëtari i *n*-të = $7n - 4$.

Rrjedh se anëtari i 40-të i këtij vargu gjendet duke zëvendësuar $n = 40$ në formulën.

$$\begin{aligned} \text{anëtari i 40- të} &= 7 \cdot 40 - 4 \\ &= 280 - 4 \\ &= 276 \end{aligned}$$

Shembulli

Caktoji anëtarin e *n*-të dhe anëtarin e 50-të te vargu linear 37, 33, 29, 25, 21,...

37 33 29 25 21

−4 −4 −4 −4

Anëtarët vijnë duke u zvogëluar për 4. Prandaj krahaso anëtarët me tabelën për shumëzim me -4.

Numri rendor, *n*	1	2	3	4	5	·−4
Tabela e shumëzimit me −4	−4	−8	−12	−16	−20	+41
Anëtari	37	33	29	25	21	

Rregulla është:

anëtari = $-4 \cdot$ numri rendor i anëtarit, dhe pastaj shtojmë 41.

Prandaj, anëtari i përgjithshëm është: anëtari i n-të = $-4n + 41 = 41 - 4n$.

anëtari i 50-të = $41 - 4 \cdot 50$

$= 41 - 200$

$= -159$

Detyra

1. Caktoji: **I** anëtarin e n-të **II** anëtarin e 50-të të këtyre vargjeve aritmetike rritëse.

Paraqite me tabelë punën tënde. (Detyra nën **a)** është zgjidhur si shembull.)

a) 3, 7, 11, 15, …

Numri rendor, n	1	2	3	4	50	n
Anëtari	3	7	11	15	199	$4n-1$

· 4 dhe zbrit 1

+4 +4 +4

b) 2, 5, 8, 11, …

c) 2, 9, 16, 23, …

ç) 9, 14, 19, 24, …

d) 1, 3, 5, 7, …

dh) 5, 16, 27, 38, …

e) 10, 18, 26, 34, …

ë) −2, 4, 10, 16, …

f) 3, 7, 11, 15, …

g) −12, −5, 2, 9, …

2. Cakto: **I** anëtarin e n – të **II** anëtarin e 30-të të këtyre vargjeve aritmetike rënëse.

Paraqite me tabelë punën tënde. (Detyra nën **a)** është zgjidhur si shembull.)

a) 5, 2, −1, −4, …

Numri rendor, n	1	2	3	4	30	n
Anëtari	5	2	−1	−4	−82	$8-3n$

· (-3) dhe shto 8

−3 −3 −3

b) 30, 27, 24, 21, …

c) 56, 51, 46, 41, …

ç) 88, 77, 66, 55, …

d) 40, 34, 28, 22, …

dh) 13, 9, 5, 1, …

e) 15, 7, −1, −9, …

ë) 7, 5, 3, 1, …

f) −2, −7, −12, −17, …

g) 3, −7, −17, −27, …

3. Fatimja kishte detyrë të caktojë anëtarin e n-të të vargut: −11, −4, 3, 10, …

Ajo shkroi:

-11 -4 3 10

+7 +7 +7

Nëse e vazhdoj vargun prapa, atëherë numri para anëtarit të parë do të jetë −18.

-18 -11 -4 3 10

+7 +7 +7 +7

Prandaj, anëtari i n-të = 7n − 18.

a) Përshkruaj në fletore dhe pastaj plotëso provat vijuese që të tregosh se anëtari i n-të i vargut: $-11, -4, 3, 10, \ldots$ është $7n - 18$.

anëtari i parë $= 7 \cdot 1 - 18 = -11$ anëtari i dytë $= 7 \cdot 2 - 18 = \ldots$

anëtari i tretë $= 7 \cdot 3 - 18 = \ldots$ anëtari i katërt $= 7 \cdot 4 - 18 = \ldots$

b) Shfrytëzoje mënyrën e zgjidhjes së detyrës së Fatimes që ta gjesh anëtarin e n-të të këtyre vargjeve lineare.

i 6, 13, 20, 27, … **ii** 9, 20, 31, 42, … **iii** 40, 42, 44, 46, …

iv 33, 37, 41, 45, … **v** 8, 3, −2, −7, … **vi** 83, 76, 69, 62, …

4. Janë dhënë vizatime të përbëra prej kryqeve.



vizatimi 1 vizatimi 2 vizatimi 3

a) Caktoje numrin e kryqeve të nevojshëm për të ndërtuar:

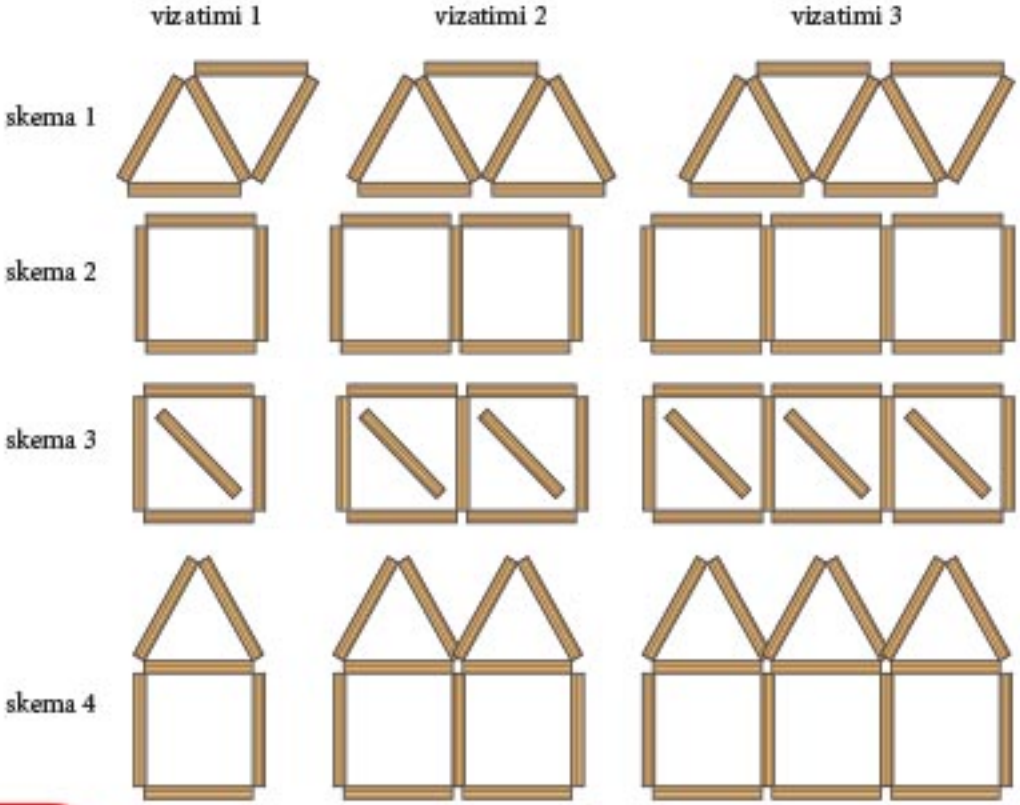
i vizatimi 4 **ii** vizatimi 5 **iii** vizatimi 6.

b) Përshkruaje tabelën në fletore dhe plotëso.

Vizatimi	1	2	3	4	5	6
Numri i kryqeve	4	7				

c) Shkruaje rregullën për gjetje të numrit të kryqeve në vizatimin n.

5. Vizatimet tregojnë katër skema të ndryshme të formuara prej fijeve të shkrepëses.



a) Vizatoje vizatimin 4 për secilën skemë.

b) Përshkruaj dhe plotësoje tabelën për secilën skemë

Vizatimi	1	2	3	4
Numri i fijeve				

c) Shkruaje rregullën për caktim të numrit të fijeve të shkrepëses në vizatimin n të secilës skemë.

Detyra për përsëritje

1. Thjeshto:

a) $7x \cdot x$ **b)** $5a \cdot 2b \cdot 3a$ **c)** $2xy \cdot 3x \cdot 5xy \cdot x$

2. Thjeshto:

a) $\frac{9x}{12}$ **b)** $\frac{3xy}{x^2}$ **c)** $\frac{6x}{10y}$ **ç)** $\frac{4a^2b}{6ab^2}$

3. Zgjidhe barazimin: $2^x = 32$

4. Thjeshto:

a) $x^4 \cdot x^5$ **b)** $2y^3 \cdot 5y$ **c)** $8a^4 \cdot 3a^7$ **ç)** $y^4 \cdot y \cdot y^8$

d) $x^5 : x^3$ **dh)** $\frac{35x^8}{40x^2}$ **e)** $\frac{x^{15}}{x^4 \cdot x^2}$ **ë)** $(x^5)^4$

5. Zbërtheji në shumëzues shprehjet:

a) $20x + 16$ **b)** $y^2 - 4y$ **c)** $3x^2 - 6x$ **ç)** $6x + 4y + 8z$

6. Njehso dhe thjeshto:

a) $\frac{x}{5} + \frac{x}{5}$ **b)** $\frac{x}{6} + \frac{x}{3}$ **c)** $\frac{7x}{10} - \frac{x}{4}$ **ç)** $\frac{5}{3x} + \frac{1}{3x}$

7. Zgjidhi barazimet:

a) $3x = 12$ **b)** $x + 5 = 16$ **c)** $3x - 4 = 11$

ç) $5x + 4 = 6 + 3x$ **d)** $\frac{x+1}{4} = 5$ **dh)** $\frac{7-2x}{2} = 5$

e) $\frac{x}{4} + 8 = 2$ **ë)** $3(2x - 7) = 4x + 3$ **f)** $\frac{15+x}{2} = 7 - x$

g) $\frac{x+5}{2} = \frac{x-4}{3}$ **gj)** $5(3x - 2) - 2(3x - 4) = 13$

8. Cakto funksionet inverse të funksioneve.

a) $x \to 5x$ **b)** $x \to x - 8$ **c)** $x \to 6x - 4$ **ç)** $x \to \frac{3x-5}{2}$

9. Shkruaj tre anëtarët e radhës të secilit varg të dhënë:

a) 13, 19, 25, 31, … **b)** −14, −11, −8, −5, … **c)** 7, 14, 28, 56, …

ç) 7, 5, 3, 1, … **d)** 400, 200, 100, 50, … **dh)** 3, 6, 11, 18, 27, …

e) −7, −5, −1, 5, 13, … **ë)** 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … **f)** 16, 8, 4, 2, 1, …

g) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \cdots$ **gj)** $\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \cdots$ **h)** $5a^5, 8a^7, 11a^9, 14a^{11}, \ldots$

10. Shkruaj katër anëtarët e parë të vargut anëtari i n-të i të cilit është:

a) $n+3$ **b)** $2n-1$ **c)** $4n+3$ **ç)** $4n-5$

d) $23-2n$ **dh)** $15-4n$ **e)** n^2+1 **ë)** n^2-2

f) $2n^2$ **g)** $n(n+1)$ **gj)** n^2+5n **h)** n^3+2

11. Është dhënë një skemë numerike.

rreshti 1: $2 = 2 = 1^2+1$

rreshti 2: $2+4 = 6 = 2^2+2$

rreshti 3: $2+4+6 = 12 = 3^2+3$

rreshti 4: $2+4+6+8 = 20 = 4^2+4$

a) Shkruaji dy rreshtat e ardhshëm të vargut.

b) Shkruaj formulë për shumën e numrave në rreshtin n.

12. Vargu 3, 9, 27, 81,...është formuar në mënyrën:

$3^1 = 3$ $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Nga rrjedh se anëtari i përgjithshëm i vargut është: anëtari i n-të = 3^n.

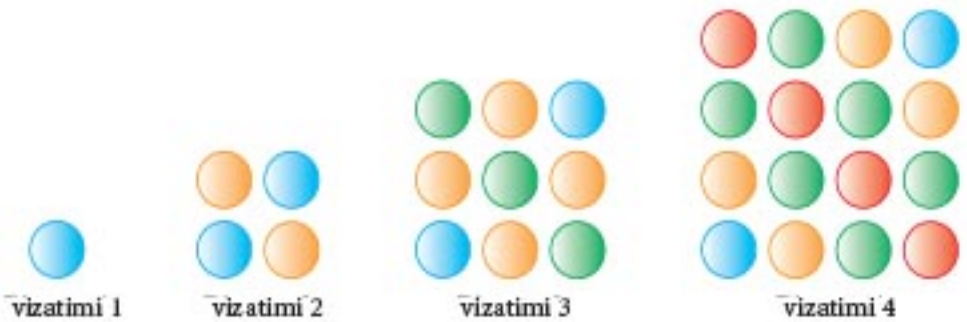
Secili prej vargjeve vijuese është disi i ndërlidhur me vargun 3, 9, 27, 81,...

Cakto lidhjen dhe pastaj shkruaje rregullën për anëtarin e n-të të vargjeve.

a) 4, 10, 28, 82, … **b)** 7, 13, 31, 85, … **c)** 1, 7, 25, 79, …

ç) 2, 8, 26, 80 **d)** 6, 18, 54, 162, … **dh)** 7, 20, 57, 166, …

13.



Në vizatime është treguar si formohet vargu numerik vijues.

vizatimi 1: $1 = 1 = 1^2$

vizatimi 2: $1+2+1 = 4 = 2^2$

vizatimi 3: $1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$

vizatimi 4: $1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$

a) Shkruaji dy rreshtat e ardhshëm të vargut.

b) Shfrytëzo skemat numerike për të gjetur numrin e përgjithshëm të rrathëve në:

i vizatimin 20 **ii** vizatimin 50.

14. Te vargjet e dhëna aritmetike cakto:
I anëtarin e n-të II anëtarin e 40-të të vargjeve të dhëna aritmetike.

a) 12, 14, 16, 18, … **b)** 5, 11, 17, 23, … **c)** −9, −5, −1, 3, …

ç) 41, 45, 49, 53, … **d)** 3, 14, 25, 36, … **dh)** 2, 11, 20, 29, …

e) 17, 14, 11, 8, … **ë)** 38, 32, 26, 20, … **f)** −11, −19, −27, −35, …

15. Karriget janë renditur përreth tavolinës siç është paraqitur në vizatim.



1 tavolinë 2 tavolina 3 tavolina

a) Përshkruaj dhe plotëso tabelën.

Numri i tavolinave	1	2	3	4
Numri i karrigeve	6			

b) Përcaktoje numrin e personave që mund të ulen në 10 tavolina të renditur në këtë mënyrë.

c) Përcaktoje numrin e personave që mund të ulen në n tavolina të renditur në këtë mënyrë.

ç) Përcaktoje numrin e tavolinave që janë të nevojshme për t'i ulur 50 persona në këtë mënyrë.

3 Gjeometria dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Vizaton forma 3D në letër izometrike (letër me pika).
- Analizon forma 3D përmes rrjetave dhe projeksioneve.
- Identifikon rrafsh të simetrisë te forma 3D.
- Krijon shabllone prej trekëndëshave dhe katërkëndëshave të cilat përsëriten për mbulim të rrafshit, duke përdorur shumën e këndeve, rotacionit për 180° dhe translacionit; cili shumëkëndësh i rregullt do të mbulojë rrafshin dhe shpjegon përse me tjerët nuk mund.
- Di cilat elemente janë të nevojshme për simetri boshtore, rrotacion, translacion dhe ngjashmëri.
- Di se me translacion, rotacion dhe simetri boshtore ruhet gjatësia e brinjëve dhe madhësia e këndeve dhe pasqyrohet objekti në figurë të puthitshme, kurse me ngjashmëri ruhet madhësia e këndeve, por jo edhe gjatësia e brinjëve.
- Transformon format 2D me kombinim të rotacionit, simetrisë boshtore dhe translacionit; e përshkruan transformimin me të cilin objekti është transformuar në figurën e vet.
- Përdor rrjetë koordinative për zgjidhje të problemeve të cilat kyçin translacion, rotacion, simetri boshtore dhe ngjashmëri.
- Transformon format 2D me qendër të dhënë dhe koeficient të ngjashmërisë i cili është numër i plotë pozitiv më i madh se 1; identifikon koeficientin e ngjashmërisë si raport prej gjatësive të cilado dy segmenteve përkatëse.

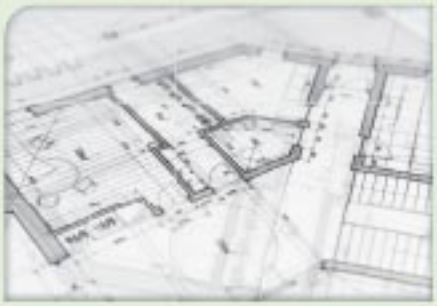
3.1 Tre dimensionet

Të vizatuarit e vizatimit

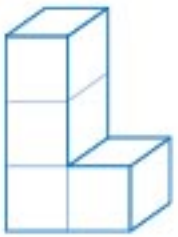
Plan është skicë precize në raport të ndonjë objekti ose konstruksioni tjetër.

Plani i shtëpisë i paraqitur në të djathtë është vizatuar me dorë nga arkitekti.

Sot planet rrallëherë vizatohen me dorë, më shpesh përdoren programet kompjuterike për vizatim.



Plani dhe projeksionet



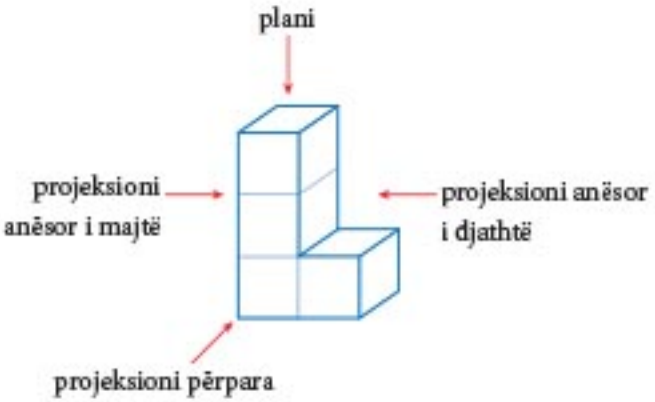
Në vizatim është paraqitur 3D-forma e përbërë prej katër kubeve.

Brinja e secilit kub është e gjatë 2 cm.

Më vizatimet e këtilla tregojmë 3D-formën, por këto nuk janë vizatime precize në raport. Këto vizatime i quajmë skica.

Duke vizatuar **plan dhe projeksione** të 3D-formës nga anë të ndryshme, 3D-formën mund ta tregojmë në madhësi të vërtetë ose në raport.

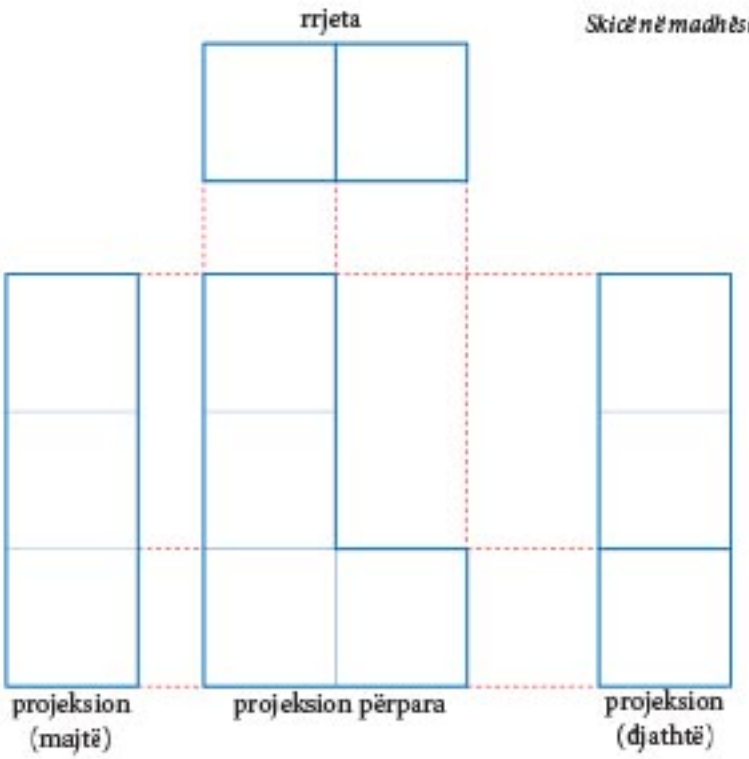
Në vizatim janë paraqitur plani dhe projeksionet e një 3D-forme.



Plani është pamja e 3D-formës kur e shikojmë nga sipër (lart).

Projeksioni përpara është pamja e 3D-formës kur e shikojmë nga ana e përparme.

Projeksionet anësore janë pamjet e 3D-formës kur i shikojmë nga ana e majtë, respektivisht nga ana e djathtë.



Vizatimi është vizatuar në madhësi të vërtetë. Për 3D-forma më të mëdha mund të vizatojmë në raport.

Drejtëzat e kuqe me ndërprerje nuk janë të domosdoshme, por i përdorim për të treguar se plani dhe projeksionet kanë dimensione të njëjta.

Zakonisht nuk është e domosdoshme të vizatohen të dy projeksionet anësore.

Te projeksioni i djathtë vërejmë një vijë më të errët.

Ajo tregon se ekziston ndryshim i nivelit të thellësisë kundrejt projeksionit.

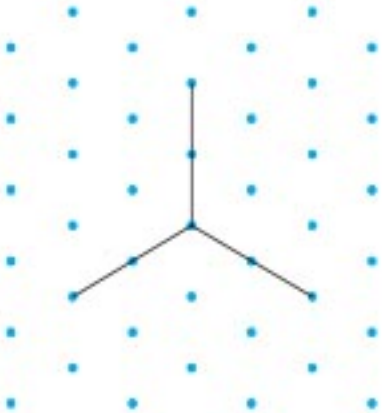
Vizatime izometrike

Mënyrë tjetër e paraqitjes së objekteve tredimensionale në rrafsh është duke përdorur **letër (fletë) izometrike**.

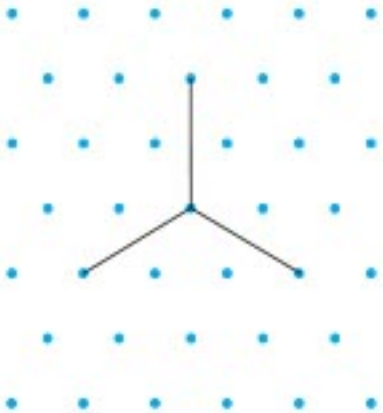
Letra izometrike është letër në të cilën janë vizatuar rrjetet prej pikave të vendosura të kulmit të trekëndëshit barabrinjës, zakonisht në largesë 1cm ndërmjet tyre.

Kryesore është që letra të jetë vendosur në pozitë të drejtë kur vizatojmë 3D-forma.

Vendosje e drejtë e letrës është kur drejtëza e cila kalon nëpër tri pika qëndron vertikalisht në fletë.



pozitë e drejtë



pozitë jo e drejtë

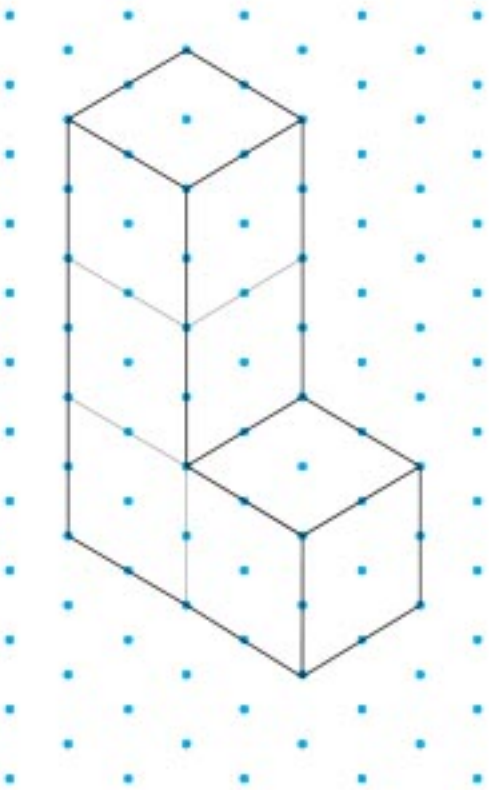
Në vizatim është treguar vizatim izometrik i 3D-formës në formë të shkronjës L.

Vërejmë se vijat vertikale vërtet qëndrojnë vertikalisht në vizatim.

Të gjitha drejtëzat kalojnë nëpër pikat e nevojshme.

Vizatimi është vizatuar në madhësi të vërtetë.

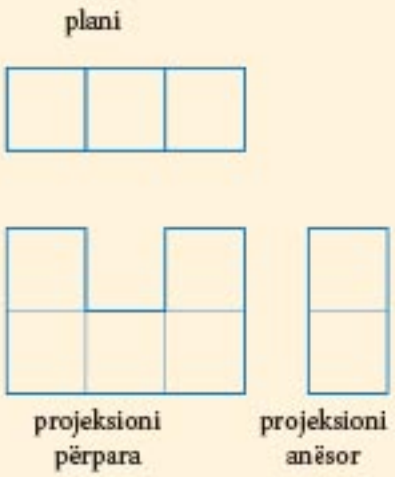
Secili teh i 3D-formës është vizatuar në gjatësi të vërtetë.



Shembulli

Në vizatim janë paraqitur plani dhe projeksionet e një 3D-forme.

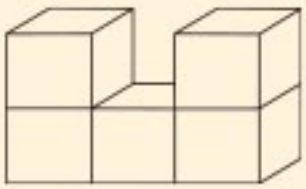
Vizato 3D-formën.



Në fillim vizatojmë skicën e 3D-formës.

Vizatojmë vizatim të 3D-formës ashtu siç duhet të duket në hapësirë.

Skica në anën e djathtë tregon 3D-formën.

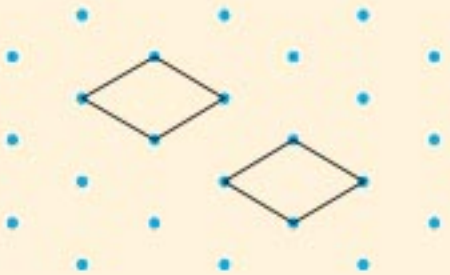


Fillojmë duke vizatuar pjesën e sipërme të 3D-formës në fletë izometrike.

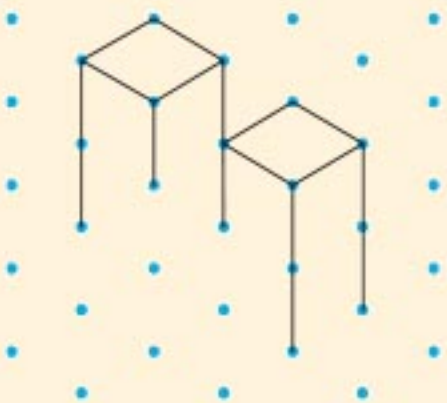
Kontrollojmë se letra a ka pozitë të drejtë.

Secili nga katrorët e vegjël duket si romb.

Brinjët e rombeve kanë gjatësinë 1 cm.



Pastaj vizatojmë vijat vertikale.



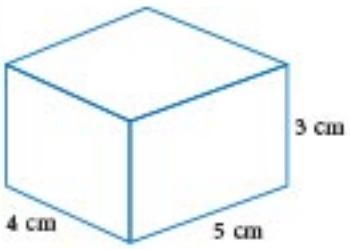


Vizatimin e përfundojmë duke vizatuar vijat e mbetura.

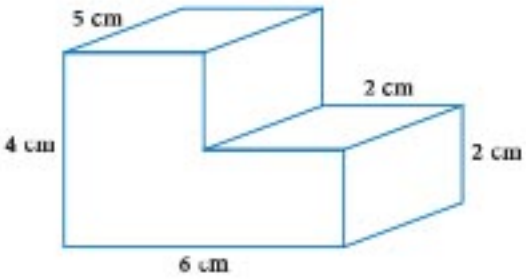
Detyra

1. Vizato planin, projeksion përpara dhe një projeksion anësor 3D-format e dhëna.

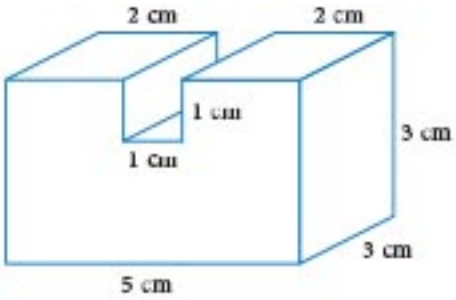
a)



b)

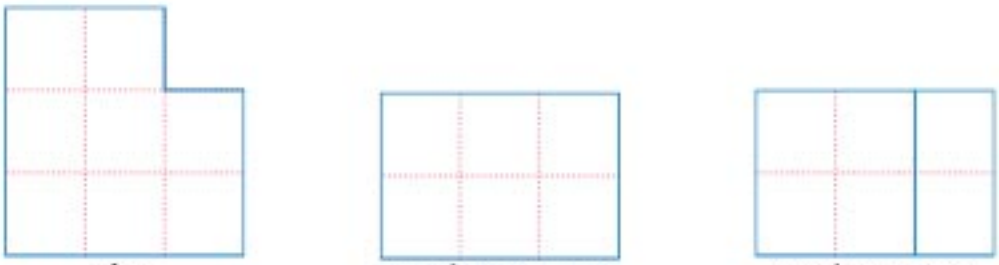


c)



2. 3D-format nga detyra paraprake vizatoji në fletë izometrike.

3. Në vizatim janë treguar plani dhe projeksionet i një 3D-formës.



Vizato formën 3D në fletë izometrike.

4. Në vizatimet janë paraqitur plani, projeksioni përpara dhe një projeksion anësor i një forme 3D.

Skico secilën nga format dhe shkruaje emrin matematikor të saj.

a)



b)



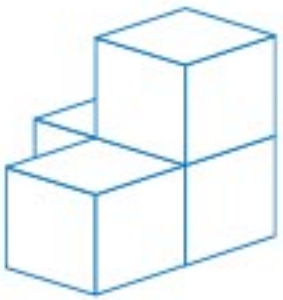
c)



5. 3D-forma e dhënë përbëhet prej katër kubeve.

Tehu i këtyre kubeve është 2 cm.

Vizato planin dhe projeksion të 3D-formës.

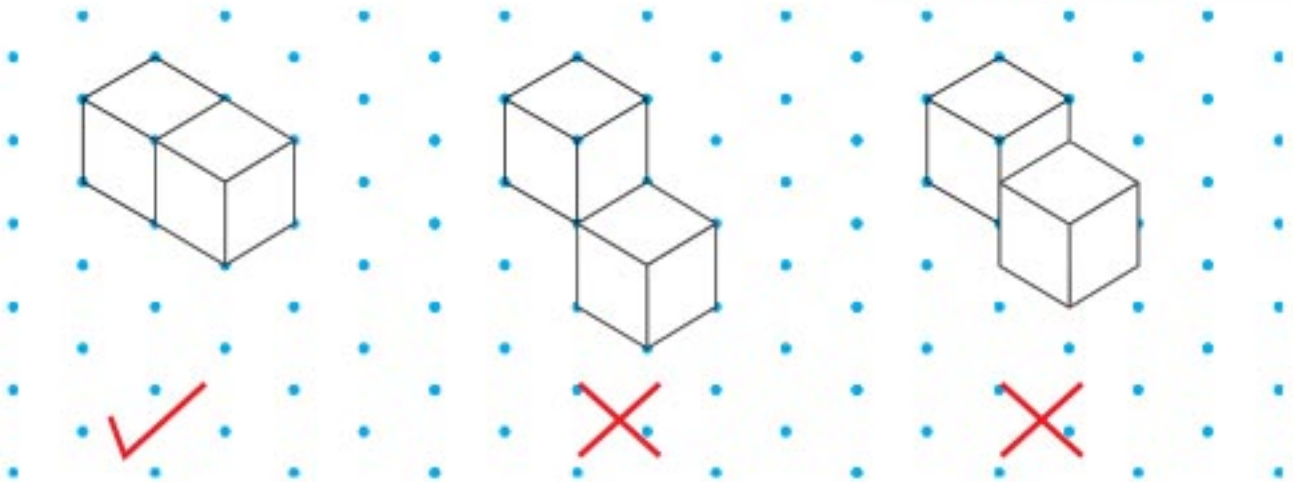


6. Forma 3D në detyrën e mësipërme është e përbërë prej katër kubeve të ngjitura.

Gjej tjera forma 3D të cilat mund të formohen me ngjitje të këtyre katër kubeve.

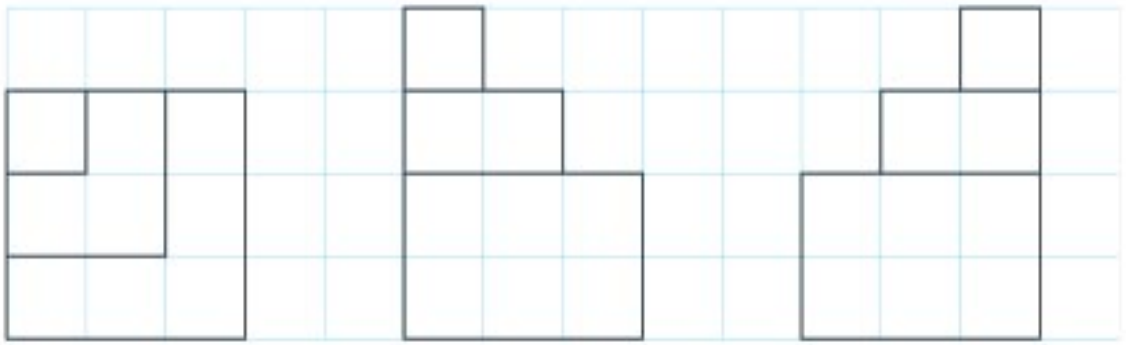
Kubet janë të ngjitura ashtu që preken mur për mur me tërë sipërfaqen dhe nuk puthiten, respektivisht nuk hyjnë njëri në tjetrin.

Shfrytëzo kube të vogla që të shohësh si duket 3D-formës para se ta vizatosh.



Format 3D të fituara vizatoji në fletë izometrike.

7. Në vizatime janë paraqitur plani dhe projeksionet e një forme 3D.



plani | projeksioni përpara | projeksioni anësor

Vizatoje formën 3D në fletë izometrike.

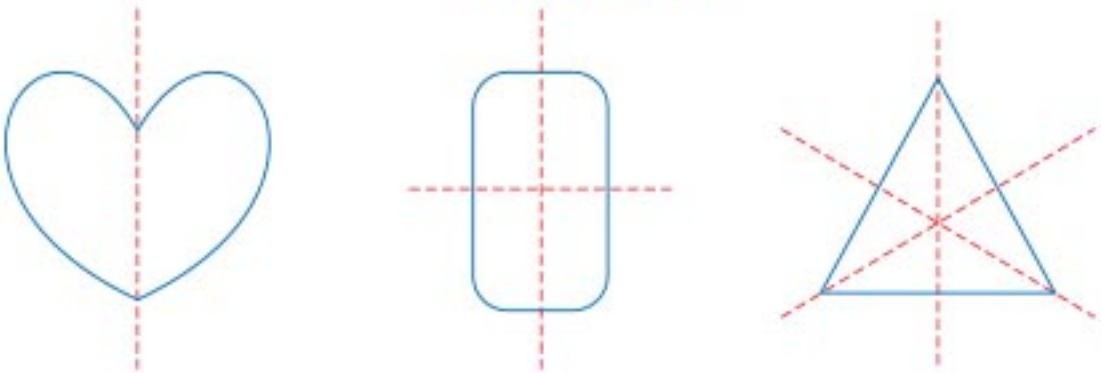
Bëj skicë nga forma 3D me ndihmën të kubeve të ngjitura.

3.2 Simetria boshtore në tre dimensione

Në rrafsh boshti i simetrisë e ndan 2D-formën në dy pjesë **të puthitshme**.

Secila nga dy pjesët është pasqyrë e tjetrit.

Në vizatim janë paraqitur disa shembuj të **simetrisë boshtore** të formave 2D.

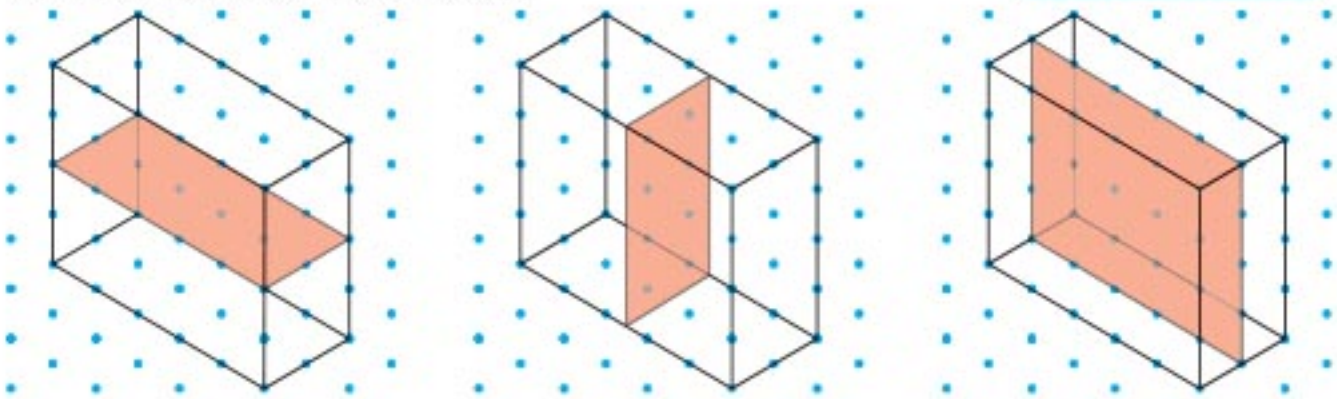


boshti i simetrisë | 2 boshte të simetrisë | 3 boshte të simetrisë

Në hapësirë tredimensionale, shqyrtojmë simetri në lidhje me **rrafshin e simetrisë** e cila e ndan 3D-formën në dy trupa të puthitshëm.

Kuadri i dhënë ka tre rrafshe simetrie.

Nën rrafsh nënkuptojmë sipërfaqe të rrafshët.



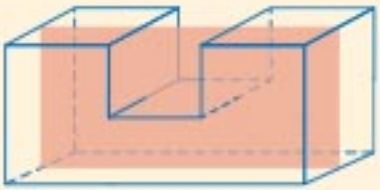
Shembulli

Përcakto sa rrafshe simetrie ka 3D-forma e dhënë.



Për t'i caktuar rrafshet e simetrisë mund të vizatojmë skica të 3D-formës.





Në skicat janë paraqitur dy rrafshet e simetrisë së 3D-formës së dhënë.

Detyra

1. Në vizatim është paraqitur piramidë me bazë katror dhe një rrafsh simetrie e saj.

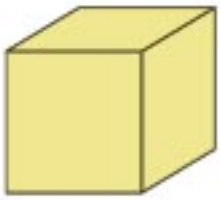
   Piramida ka edhe tre rrafshe të simetrisë.

   Në vizatime të veçanta paraqiti (tregoji) tre rrafshet tjerat të simetrisë.



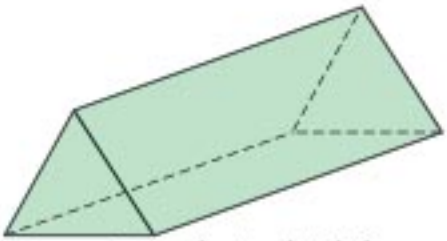
2. Përcakto sa rrafshe të simetrisë ka secila nga këto forma tredimensionale.

a)



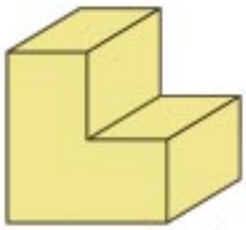
kubi

b)



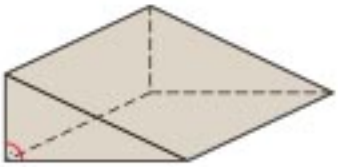
prizmi me bazë trekëndësh barabrinjës

c)



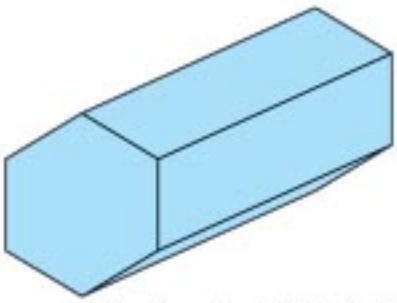
prizmi në formë L

ç)



prizmi me bazë trekëndësh këndrejtë

d)

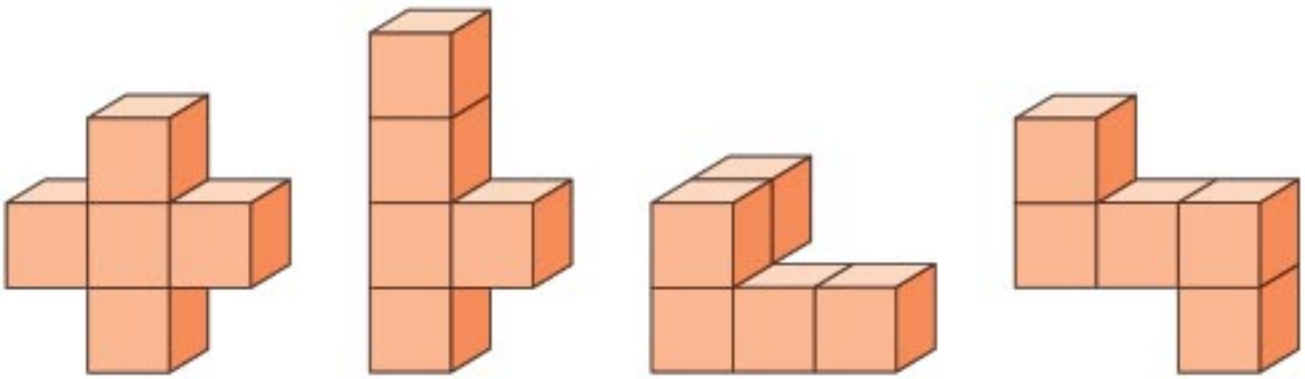


prizmi me bazë gjashtëkëndësh i rregullt.

3. Secila nga format 3D është përbërë prej pesë kubeve.

Përcakto nga sa rrafshe simetrie ka çdonjëri prej tyre.

a) **b)** **c)** **ç)**



4. Secila nga format 3D në detyrën e mësipërme është përbërë prej pesë kubeve.

Bëj tjetër shpërndarje të pesë kubeve ashtu që forma 3D e rifituar do të ketë dy rrafshe simetrie.

Shfrytëzo kube të vogla që të kontrollosh a ekziston formë 3D me dy rrafshe.

3.3 Tesalacioni

Mozaikët romak

Fjala "tesalacioni" rrjedh nga fjala latine "tesare" e cila nganjëherë shkruhet si "tessela" dhe shënon një pllakë të vogël.

Tesalacioni ose mozaiku është arti i krijimit të figurave të përbëra nga copa të vogla prej qelqi me ngjyrë, gur apo materiale të tjera.

Mozaikët e parë i hasim shumë më herët. Mozaikë kanë bërë Sumerët para 4000 viteve gjatë zbukurimit të ndërtimeve.

Romakët ishin të njohur veçanërisht sipas mozaikëve të tyre për dysheme dhe mure.

Në Maqedoni ekzistojnë mbetje nga mozaikë romak në lokalitetin arkeologjik Stobi në afërsi të qytetit Veles.



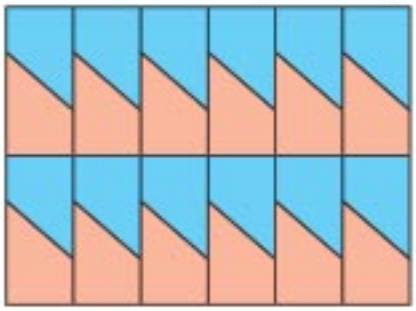


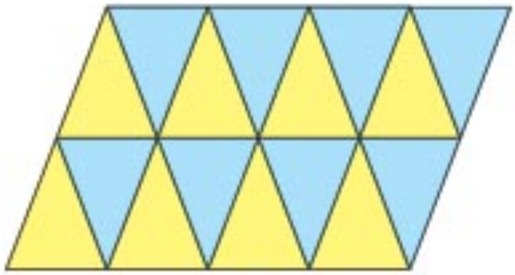
Trekëndëshat dhe katërkëndëshat

Skema e formave që mbulojnë sipërfaqe të rrafshët pa përputhje ose zbrazëtira quhet **tesalacion** ose **mozaik**.

Në vizatimet janë paraqitur shembuj të mozaikëve.

Në secilën skemë ka një formë që përsëritet më shumë herë.





Ta shqyrtojmë mënyrën për formim të mozaikut nga trekëndëshat.

Hapi 1

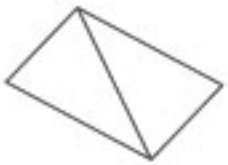
Vizatojmë trekëndësh të çfarëdoshëm.



Hapi 2

Vizatojmë ngjitur me trekëndëshin fillestar, trekëndëshin e ri të fituar me rotacion të trekëndëshit fillestar për 180°.

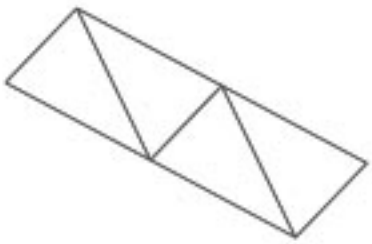
Fitojmë paralelogram të formuar nga dy trekëndëshat.



Hapi 3

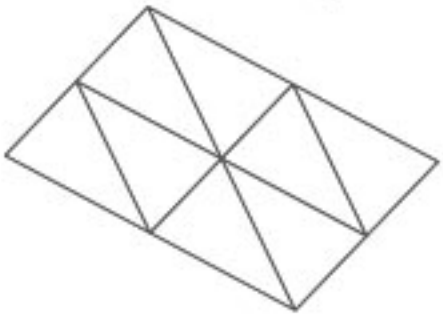
I përsërisim dy hapat e parë që të vendosim tjetër paralelogram ngjitur me të parin.

Vazhdojmë të ndërtojmë rreshtin me trekëndësha.



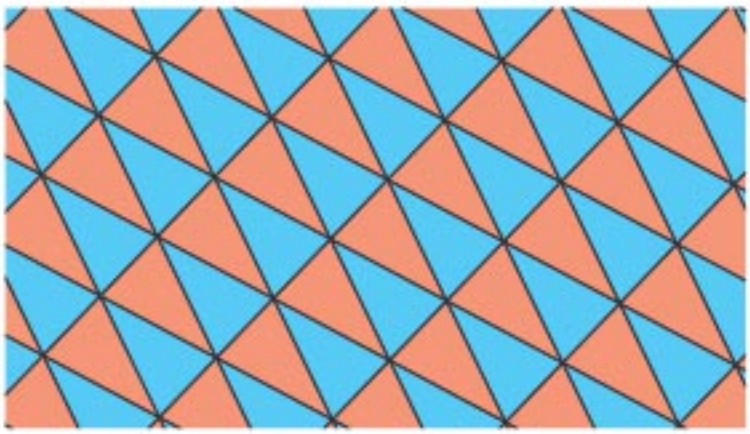
Hapi 4

Vizatojmë rreshtin tjetër me trekëndësha afër rreshtit të parë.



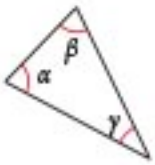
Hapi 5

Tani mund të shohim si është ndërtuar mozaiku. Skemën e fundit e ngjyrosim.



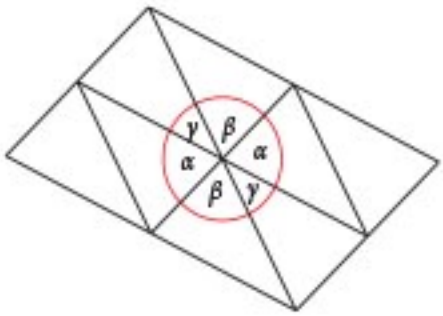
Do t'i shënojmë me simbole këndet e trekëndëshit që të shohim përse është e mundur të krijohet mozaik.

Ky është trekëndëshi fillestar me këndet α, β dhe γ.



Shuma e këndeve të brendshme në trekëndësh është 180°, pra $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Shqyrtojmë këndin e mozaikut të formuar.



Përreth kulmit në të cilin ngjiten katër katërkëndësha, vizatojmë qark. Vërejmë se secili nga këndet e trekëndëshit fillestar paraqitet nga dy herë në këtë qark.

Shuma e këndeve në kulm është $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$= 2(\alpha + \beta + \gamma)$

$= 2 \cdot 180°$

$= 360°$

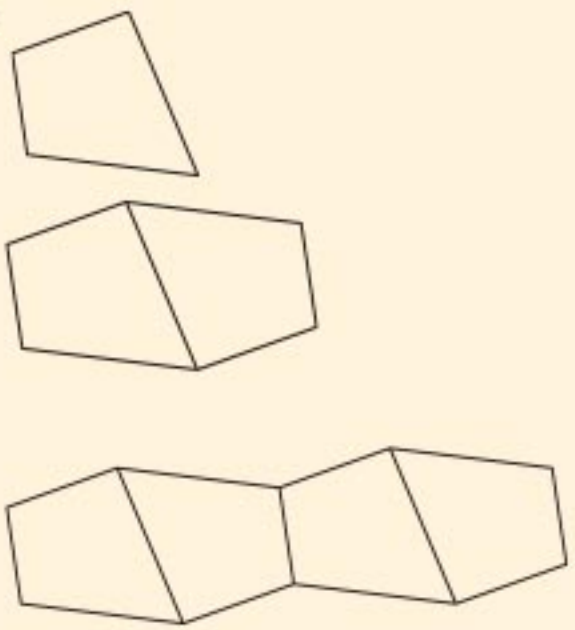
E dimë se këndi i plotë ka 360° dhe kjo do të thotë se një 2D-forma është mozaik nëse shuma e këndeve në kulmin e brendshëm ku ngjiten 2D-format, është 360°.

Shembulli

a) Formo mozaik nga katërkëndëshi me mënyrën e përshkruar paraprakisht.

b) Trego se shuma e këndeve në çdo kulm të brendshëm të mozaikut është 360°.

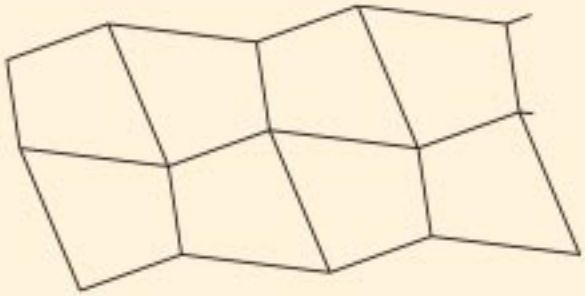
a)



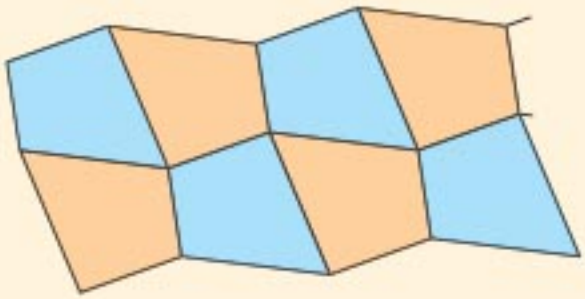
Hapi 1: Vizatojmë katërkëndësh.

Hapi 2: Vizatojmë katërkëndësh të fituar me rrotullim (rotacion) për 180° ngjitur me katërkëndëshin fillestar.

Hapi 3: E përsëritim procesin për të formuar rresht prej katërkëndëshave.



Hapi 4: Vizatojmë tjetër rresht ngjitur me të parin.

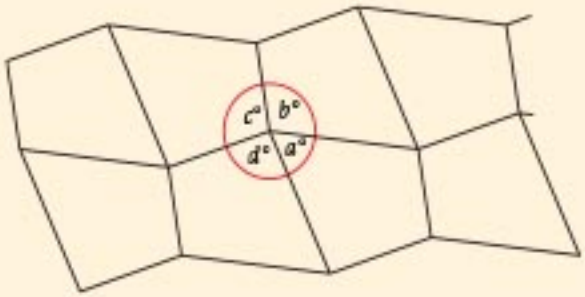


Hapi 5: Ngjyrosim mozaikun e fundit.

b) 

I emërtojmë katër këndet e katërkëndëshit fillestar me $a°$, $b°$, $c°$ dhe $d°$.

Shuma e këndeve të brendshme në katërkëndësh është 360°, pra $a° + b° + c° + d° = 360°$.



I shënojmë katër këndet në kulmin e brendshëm të formës finale të mozaikut.

Katër këndet në secilin kulm të brendshëm janë $a°$, $b°$, $c°$ dhe $d°$.

E dimë se shuma e këndeve në katërkëndësh është $a° + b° + c° + d° = 360°$, prandaj përfundojmë se po ashtu shuma e këndeve në çdo kulm është 360°. Pra është krijuar mozaik.

Detyra

1. Rivizatoje trekëndëshin e dhënë në fletore.
   Shfrytëzoje mënyrën e përshkruar më lart për vizatim të mozaikut.
   Vizato mozaik prej trekëndëshit të dhënë.



2. Rivizatoje katërkëndëshin e dhënë në fletore.
   Shfrytëzoje mënyrën e përshkruar më lart për vizatim të mozaikut.
   Vizato mozaik prej katërkëndëshit të dhënë.



3. **a)** Vizato mozaik prej katërkëndëshit të dhënë.



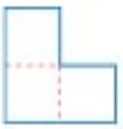
b) Duke i emërtuar këndet, trego se shuma e këndeve në çdo kulm të brendshëm të mozaikut të krijuar është 360°.

4. 2D-forma ka formën e shkronjës L dhe është përbërë nga tre katrorë.

Ekzistojnë disa mënyra me të cilat mund të formohet tesalacioni nga kjo 2D-formë.

Vizato tesalacion nga 2D-forma e dhënë.

Vizato në fletore me katrorë që më lehtë të formosh mozaikun.



5. Në vizatim është paraqitur pesëkëndësh me kënde të brendshme 90°, 90°, 135°, 90° dhe 135°.

a) Vizato mozaik prej këtij pesëkëndëshi.

b) Trego se shuma e këndeve në çdo kulm të brendshëm të mozaikut të krijuar është 360°.

Vizato të paktën 8 kopje të 2D-formës që të shikosh se si vazhdon skema në tesalacion.



3.4 Përshkrimi i transformimeve

Në klasën VII dhe VIII mësuam për katër lloje të **transformimeve**.

Transformimi e ndryshon **origjinalin**, 2D-formën fillestare, në **pasqyrë**, 2D-formën finale.

Transformimet që deri tani i mësuam, janë simetria boshtore, rotacioni, translacioni dhe ngjashmëria.

Gjatë simetrisë boshtore, rrotullimit ose translacionit, pasqyra është e puthitshme me origjinalin.

Nëse dy 2D-forma janë të puthitshme, atëherë kjo do të thotë se ato kanë brinjë të barabarta dhe kënde të barabarta.

Nëse kombinojmë një ose më tepër transformime të tilla, pasqyra ngel e puthitshme me origjinalin.

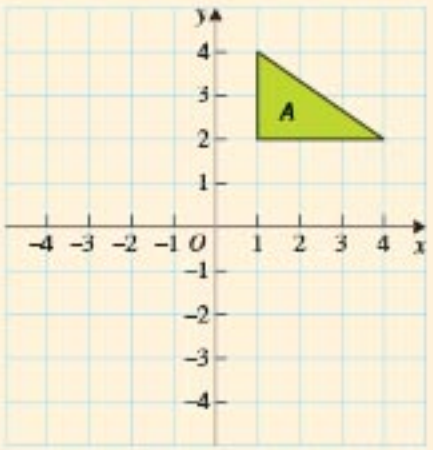
Shembulli 1

Rivizatoje trekëndëshin në fletore me katrorë.

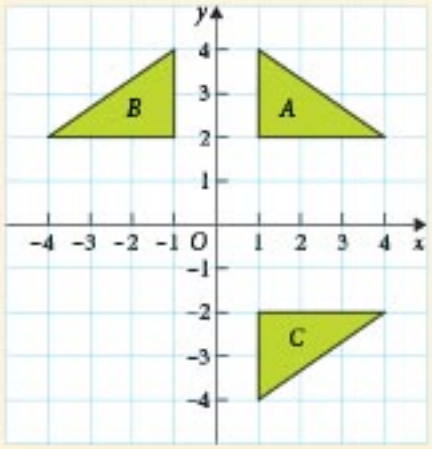
a) Caktoje pasqyren e trekendeshit A e fituar me simetri boshtore ne raport me boshtin y.
Trekendeshin e ri shenoje (emertoje) me B.

b) Bëje rrotullimin e 2D-formës B për 180o rreth (0, 0).
2D-formën e re shënoje me C.

c) Në detaje përshkruaje transformimin e vetëm që e pasqyron 2D-formën A në 2D-formën C.



a) dhe **b)**



Në vizatim janë paraqitur 2D-format B dhe C pas simetrisë boshtore dhe rrotullimit.

c) Transformimi që pasqyron 2D-formën A në 2D-formën C është simetri boshtore.

Drejtëza e simetrisë është boshti x.

Përshkrimi detal i transformimit është: Simetri boshtore në lidhje me boshtin x.

Përshkrimet në detaje

Të shohim çfarë nënkuptojmë nën përshkrim detal të çdo transformimi.

Simetria boshtore

Duhet të jetë dhënë drejtëza e simetrisë.

Ai mund të jetë i dhënë si barazim i drejtëzës.

Rrotullimi

Duhet të jenë dhënë:

- Qendra e rrotullimit shpesh e dhënë përmes koordinatave.
- Këndi i rrotullimit në shkallë ose si pjesë e vijës rrethore (në lloj thyese).
- Kahu i rrotullimit (në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës ose e kundërta). Nëse këndi i rrotullimit është 180°, atëherë nuk është e nevojshme të theksohet kahu i rrotullimit.

Translacioni

Duhet të jetë dhënë përshkrim datal për zhvendosjen.

Kjo shpesh prezantohet si distancë në të djathtë (ose të majtë) dhe distancë lart (ose poshtë).

Për kahun mund të përdorim edhe shënim me vektor, si për shembull: (x, y)

Translacioni për vektorin (x, y) domethënë zhvendosje për x njësi djathtë ose majtë dhe për y njësi lart ose poshtë.

Nëse vlera e x është pozitive, atëherë zhvendosja është në të djathtë.

Nëse vlera e x është negative, atëherë zhvendosja është në të majtë.

Nëse vlera e y është pozitive, atëherë zhvendosja është lart.

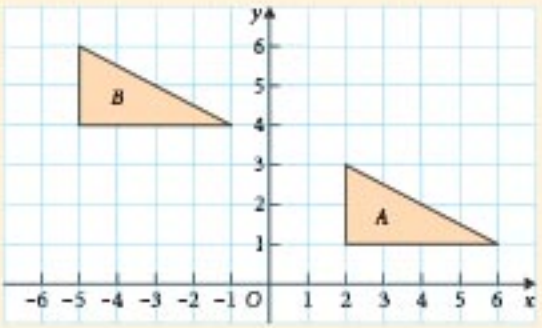
Nëse vlera e y është negative, atëherë zhvendosja është poshtë.

Për shembull, zhvendosja për vektor (-4, -5) domethënë zhvendosje për 4 njësi majtë dhe për 5 njësi poshtë.

Shembulli 2

Te vizatimi janë paraqitur 2D-format *A* dhe *B*.

Bëj përshkrimin detal të transformimit që e pasqyron 2D-formën *A* në 2D-formën *B*.



2D-forma *B* është e puthitshme me 2D-formën *A* dhe ka pamje të njëjtë.

Domethënë kemi translacion në sistemin koordinativ.

2D-forma *B* fitohet me zhvendosje të 2D-formës *A* për 7 katrorë në të majtë dhe 3 katrorë lart.

Transformimi prej *A* në *B* është translacion, 7 katrorë në të majtë dhe 3 katrorë lart.

Translacioni për vektor (-7, 3) është përshkrimi detal i dytë për transformimin.

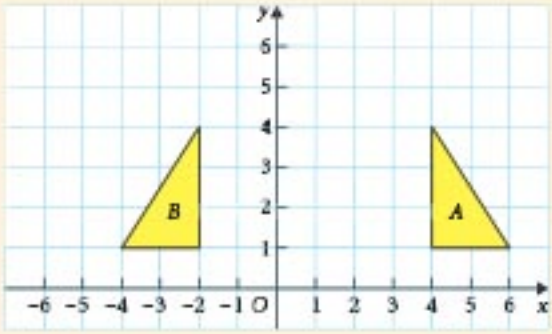
Shembulli 3

Vizato rrjetë katrore koordinative me vlera të *x*-it prej -6 deri 6 dhe vlera të *y*-it prej 0 deri 6.

Vizato trekëndësh A me kulmet në (4, 1), (4, 4) dhe (6, 1).

Vizato trekëndësh të dytë B me kulme në (-2, 1), (-2, 4) dhe (-4, 1).

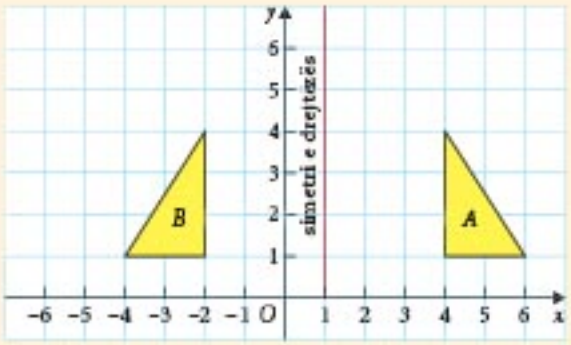
Bëje përshkrimin detal të transformimit nga trekëndëshi A në trekëndëshin B.



Fillimisht i vizatojmë boshtet koordinative.

I paraqesim kulmet dhe i lidhim ato me segmente për të formuar trekëndëshin A.

I paraqesim kulmet dhe i lidhim ato me segmente për të formuar trekëndëshin B.



Trekëndëshat janë të puthitshëm, por njëri është simetrik me tjetrin në raport me një drejtëz.

Ajo është drejtëz e simetrisë – është tërhequr në mes ndërmjet tyre.

Drerjtëza e simetrisë është treguar me ngjyrë të kuqe në vizatim.

Barazimi i drejtëzës së simetrisë është $x = 1$

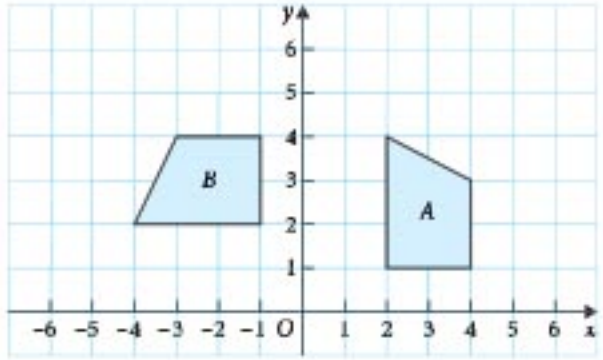
Transformimi nga A në B është simetri boshtore në lidhje (raport) me drejtëzën $x = 1$.

Përkujtohu në barazim të drejtëzës.

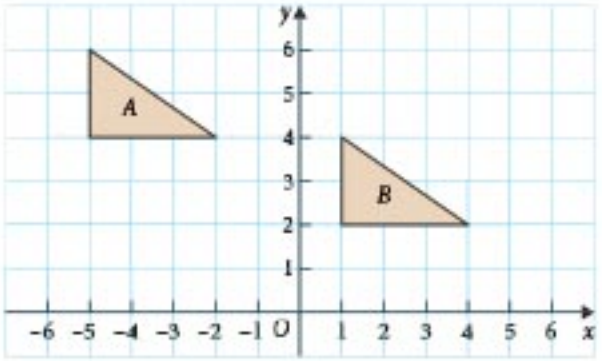
Detyra

Në detyrat prej **1** deri **9** në mënyrë detale përshkruaje transformimin nga 2D-forma *A* në 2D-formën *B*.

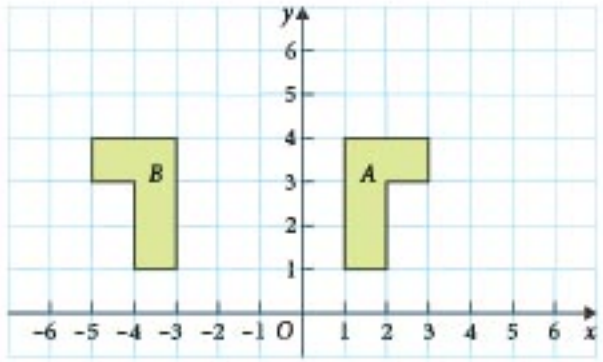
1.



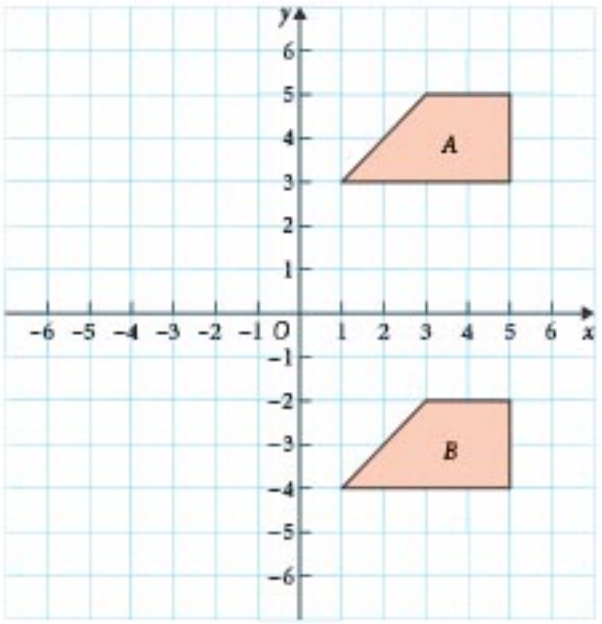
2.



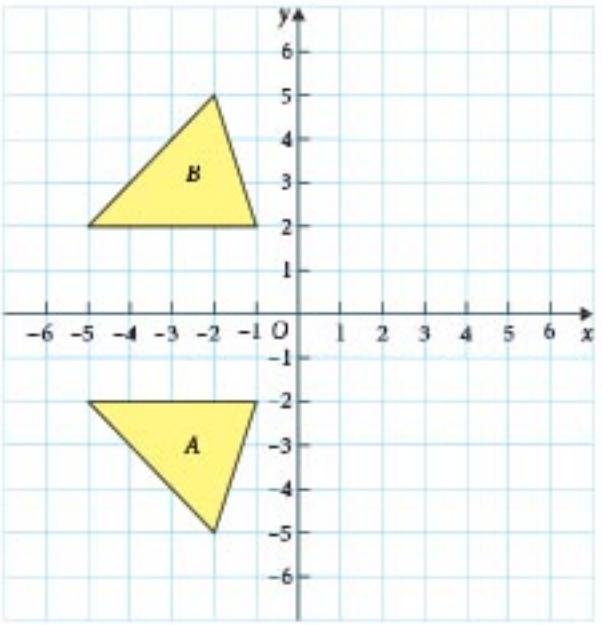
3.



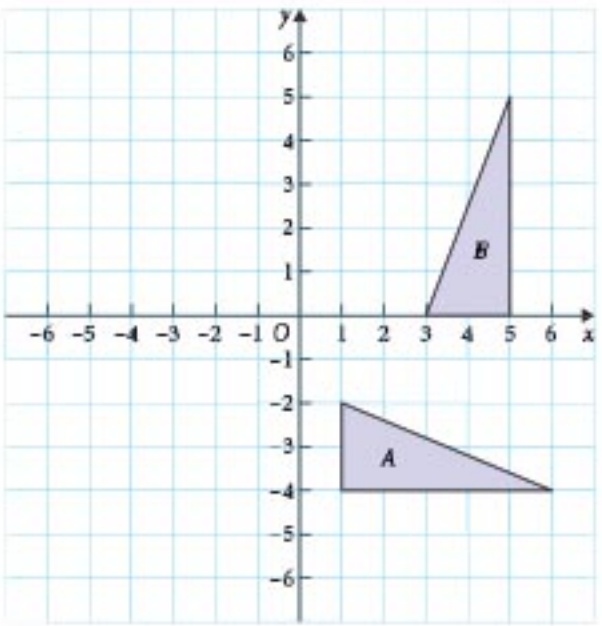
4.



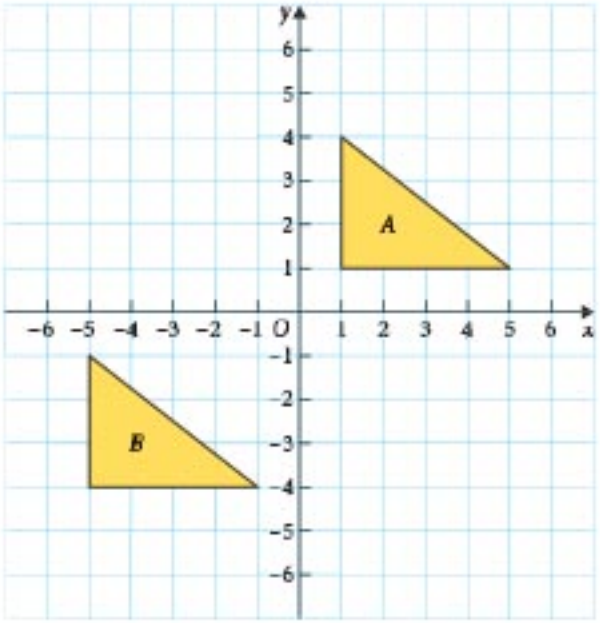
5.



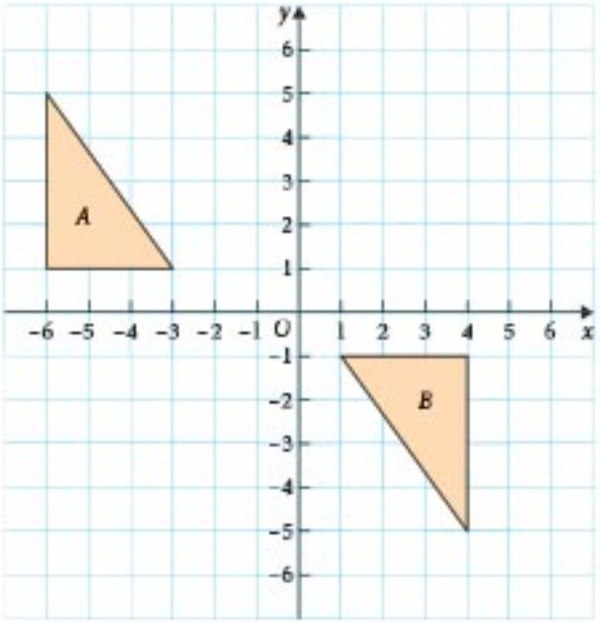
6.



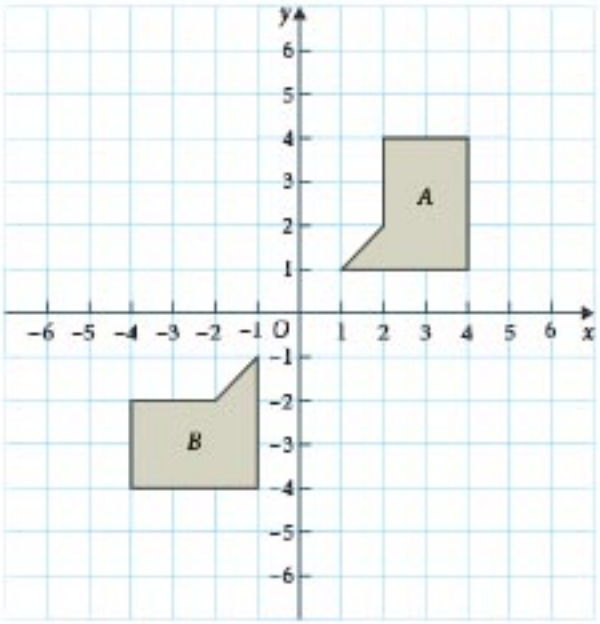
7.



8.



9.



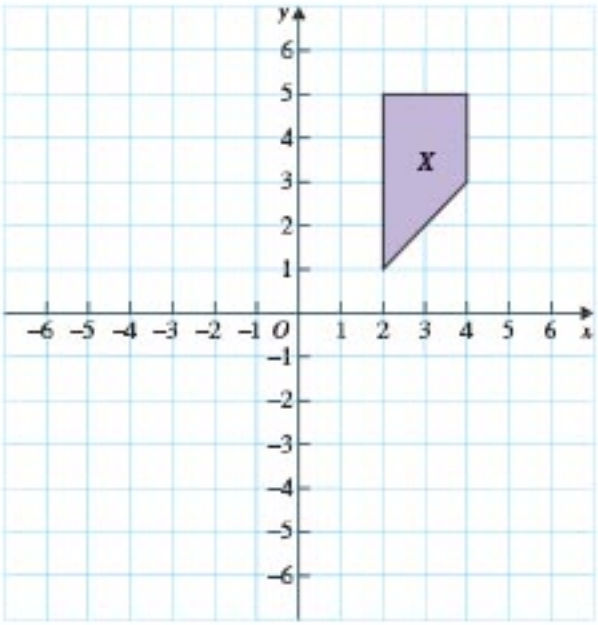
10. Kryeje vizatimin e dhënë në fletore.

a) Gjeje 2D-formën Y që është simetrike me 2D-formën X në lidhje me boshtin y.

b) Bëje rrotullimin e 2D-formën Y për 180° rreth pikës (0, 1). Figurën emërtoje me Z.

Shfrytëzo letër të tejdukshme – fletë për rivizatim që ta vizatosh rotacionin.

c) Bëje përshkrimin detal të transformimit prej X në Z.



11. **a)** Vizato rrjetë katrore koordinative me vlera të boshteve prej -6 deri 6.

b) Vizato 2D-formën A në formë të shkronjës L me kulmet e dhëna në (4, 1), (4, 4), (5, 4), (5, 2), (6, 2) dhe (6, 1).

c) Gjeje 2D-formën B që është simetrike me 2D-formën A në raport me boshtin x.

ç) Gjeje 2D-formën C që është simetrike me 2D-formën B në raport me drejtëzën $x = 1$.

d) Kryej translacion të figurës C për 5 katrorë lart. 2D-formën e re emërtoje me Ç.

dh) Bëje përshkrimin detal të vetëm i cili drejtpërdrejt e transformon figurën A në figurën Ç.

Përdor fletë të tejdukshme për rivizatim.

12. Me transformim invers pasqyra transformohet prapa në origjinal.

Për shembull, transformimi invers i translacionit për 5 katrorë djathtë është translacion për 5 katrorë majtë.

Bëje përshkrimin detal të transformimit invers për secilin nga transformimet e dhëna më poshtë.

a) Simetri boshtore ne lidhje me boshtin x.

b) Translacion për vektorin $(3, -4)$.

c) Rrotullim për 180° përreth pikës (0, 0).

ç) Simetri boshtore ne lidhje me drejtëzën $y = -x$.

d) Rrotullim për 90° ne drejtim te lëvizjes se akrepave te orës rreth pikës (0, 0).

dh) Translacion për vektorin (0, 4).

Bëj vizatim për t'i caktuar transformimet inverse.

3.5 Zmadhimi dhe ngjashmëria

2D-forma të ngjashme

Me translacion, simetria boshtore dhe e rrotullimit, 2D-format e ruajnë madhësinë dhe formën.

Për dallim nga këto, me transformimin zmadhim ndryshohet madhësia e origjinalit.

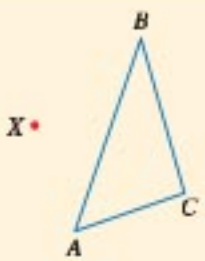
Pas zmadhimit, pasqyra ka kënde të barabarta sikur origjinali, por ndryshon madhësia e 2D-formës. Këto 2D-forma themi se janë të ngjashme.

Shkurt, origjinali dhe pasqyra kanë formë të njëjtë, por madhësi të ndryshme.

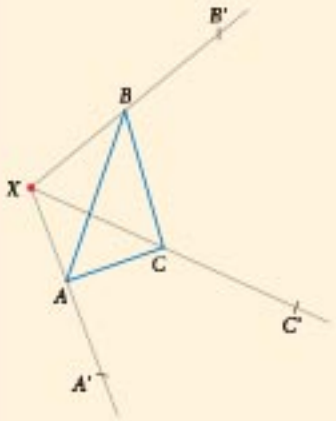
Përmes dy shembujve vijues do të rikujtohemi se si vizatohen 2D-forma të ngjashme kur është dhënë qendra e zmadhimit dhe koeficienti i ngjashmërisë.

Shembulli 1

Kryeje vizatimin në fletore.



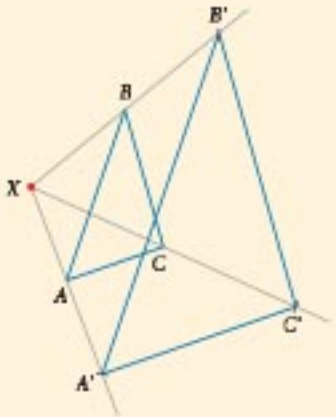
Zmadhoje trekëndëshin ABC me koeficient 2 dhe me qendër të zmadhimit në pikën X.



Në fillim vizatojmë drejtëza që kalojnë nga X nëpër secilin kulm të trekëndëshit.

E shënojmë pikën A' ashtu që $\overline{XA'} = 2 \cdot \overline{XA}$.

I shënojmë pikat B' dhe C' ashtu që $\overline{XB'} = 2 \cdot \overline{XB}$ dhe $\overline{XC'} = 2 \cdot \overline{XC}$.



Në fund i lidhim mes veti tri pikat e fituara A', B' dhe C' dhe fitojmë trekëndëshin e kërkuar.

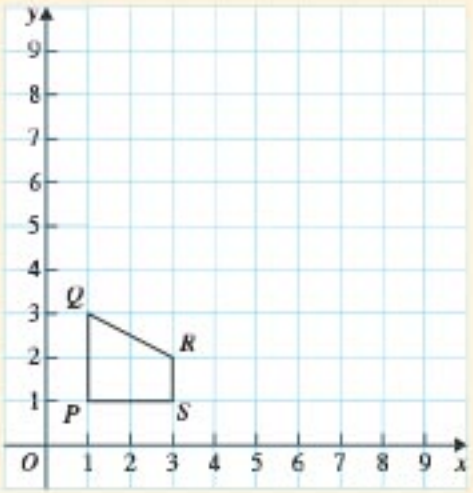
Shembulli 2

Kryeje vizatimin në fletore me katrorë.

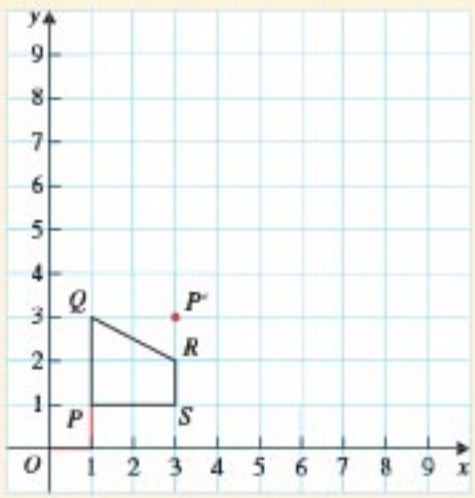
a) Zmadho $PQRS$ me koeficient 3 dhe qendër (0, 0). Figurën shënoje me $P'Q'R'S'$.

b) Mati brinjët dhe njehso:

I $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}$ II $\dfrac{\overline{Q'S'}}{\overline{QS}}$



a)



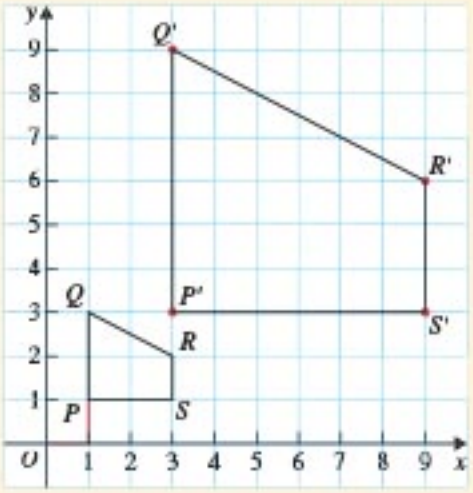
Kur 2D-forma është vizatuar në rrjetë katrore koordinative ose në fletë me katrorë, më lehtë mund ta vizatojmë zmadhimin pa vizatuar drejtëza.

Kulmi P është 1 katror diagonalisht lart nga qendra e ngjashmërisë (0, 0).

E shumëzojmë numrin e katrorëve me koeficientin e ngjashmërisë.

Pasqyra e këtij kulmi do të jetë 3 katrorë diagonalisht lart.

Në vizatimin, pasqyra e P është shënuar me P'.



E përsërisim procedurën e njëjtë edhe për pikat Q, R dhe S që t'i gjejmë pozitat e pikave Q' R' dhe S'.

I lidhim të katër pikat e fituarea dhe e fitojmë figurën e zmadhuar të 2D-formës $PQRS$

b) I Nëse çdo katror ka brinjën 1 cm, atëherë $\overline{P'Q'}$= 6 cm, kurse $\overline{PQ}$ = 2 cm.

Kemi $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{6}{2} = 3$

II $\overline{Q'S'}$ = 8,49 cm dhe $\overline{QS}$ = 2,83 cm I matim drejtëzat diagonale.

$\frac{\overline{Q'S'}}{\overline{QS}} = \frac{8,49}{2,83} = 3$

Zgjidhja mund edhe të mos jetë e saktë 3 nëse matjet nuk janë precize.

Përshkrimi i ngjashmërisë

Nga zgjidhja nën **b)** në shembullin paraprak nxjerrim përfundim të përgjithshëm.

Raporti i gjatësive përkatëse të pasqyrës dhe origjinalit është i barabartë me koeficientin e ngjashmërisë.

Koeficientin e ngjashmërisë mund ta njehsojmë me matje të dy gjatësive përkatëse dhe caktimit të herësit të tyre.

Që ta gjemë qendrën e zmadhimit, duhet të vizatojmë drejtëza nëpër kulmet përkatëse të të dy 2D-formave. Qendra e zmadhimit është në pikëprerjen e atyre drejtëzave.

Të shqyrtojmë si do të duket përshkrimi detal i zmadhimit.

Zmadhimi

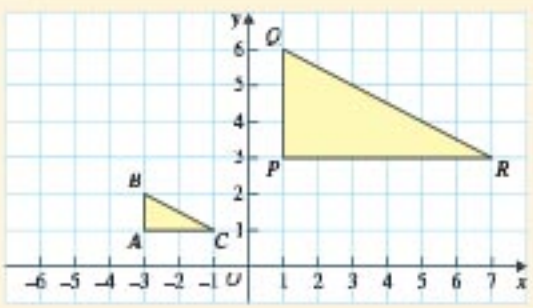
Ky transformim definohet me:

– Koeficient të ngjashmërisë, që është numër.

– Qendra e zmadhimit, mund të jepet si pikë me koordinata.

Shembulli 3

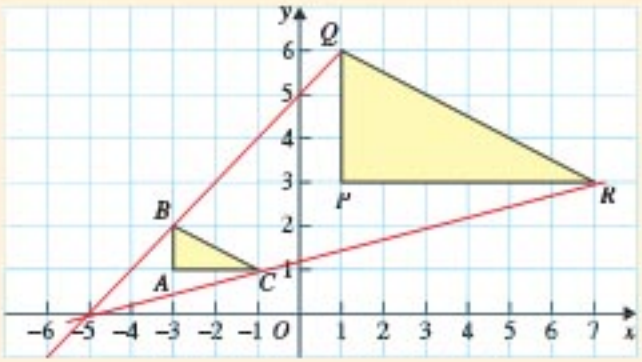
Bëj përshkrim detal të transformimit nga trekëndëshi ABC në trekëndëshin PQR.



$\overline{PQ}$ dhe $\overline{AB}$ janë brinjë përkatëse.

$\overline{PQ} : \overline{AB} = 3 : 1 = 3$

Koeficienti është 3.



Në fillim gjejmë koeficientin.

Gjejmë qendrën e zmadhimit.

Vizatojmë drejtëz nëpër dy kulmet përkatëse, Q dhe B.

Qendra e zmadhimit gjendet diku në këtë drejtëz.

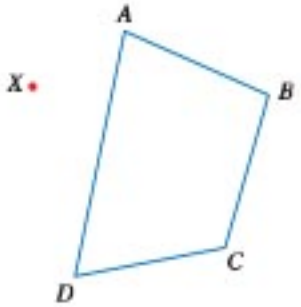
Të njëjtën e përsërisim për çiftin tjetër të kulmeve përkatëse.

Të dy drejtëzat e fituara priten në pikën (-5, 0), domethënë kjo pikë është qendra e zmadhimit.

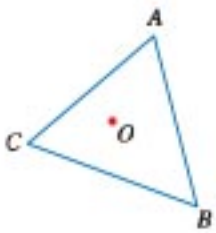
Detyra

Për detyrat 1 dhe 2 vizatimet rivizatoji në fletoret tuaja.

1. Zmadhoni $ABCD$ me koeficient 2 dhe qendër X.

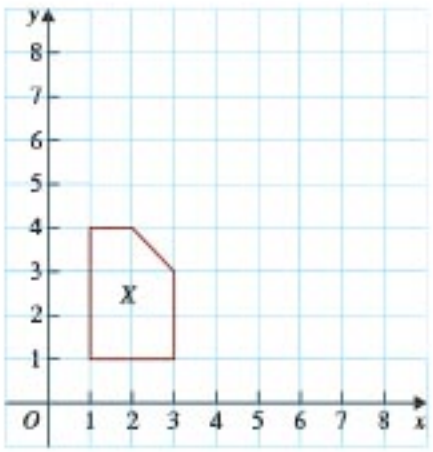


2. Zmadhoni ABC me koeficient 3 dhe qendër O.

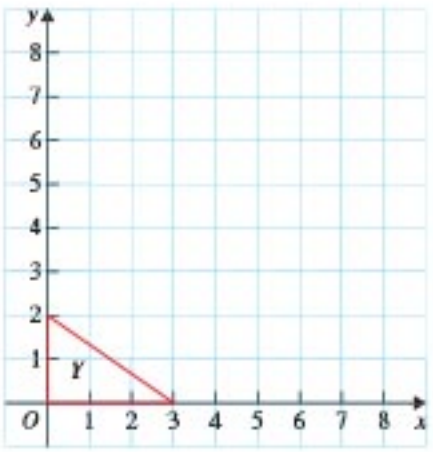


Në detyrat 3, 4 dhe 5, rivizatoji vizatimet në fletore.

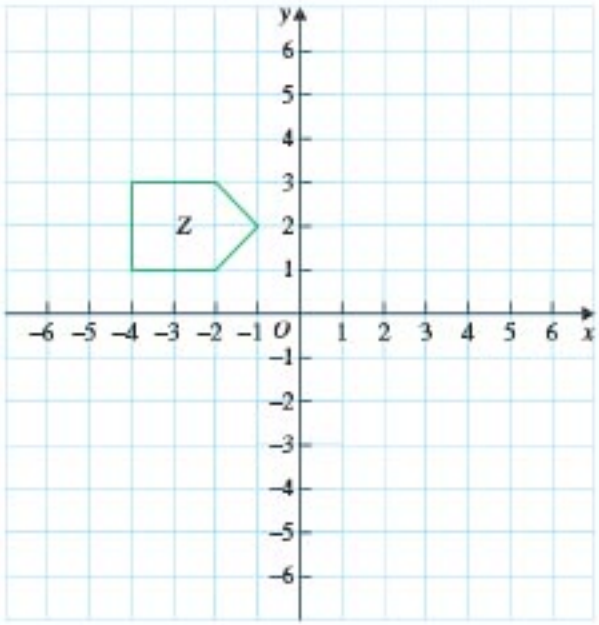
3. Zmadhoje 2D-formën X me koeficient 2 dhe qendër (0, 0).



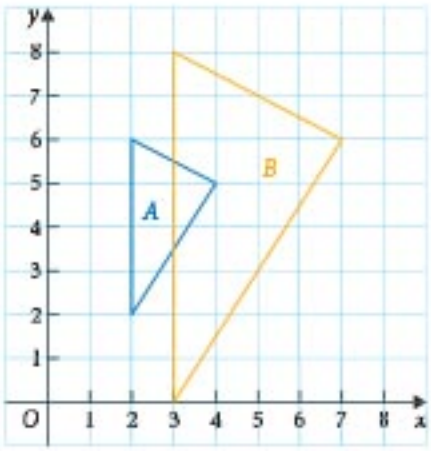
4. Zmadhoje 2D-formën Y me koeficient 3 dhe qendër (0, 0).



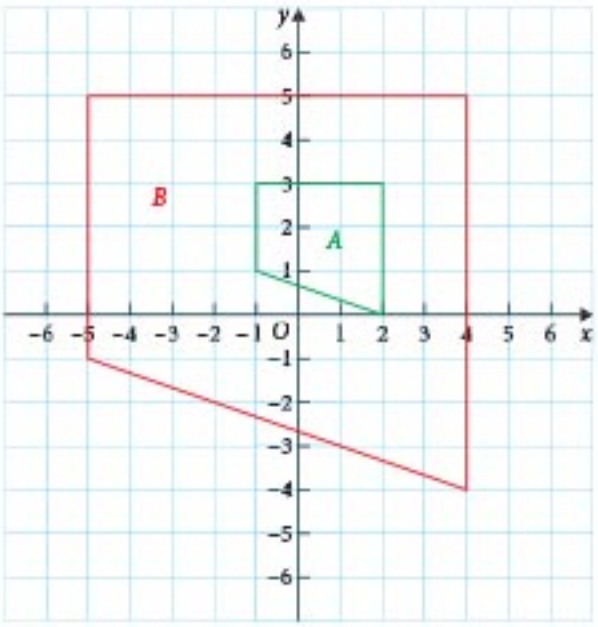
5. Zmadhoje 2D-formën Z me koeficient 3 dhe qendër $(-5, 4)$.



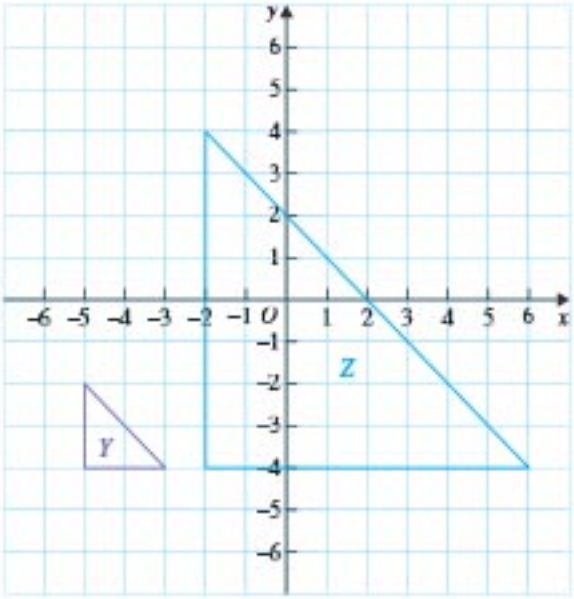
6. Detalisht përshkruaje transformimin nga 2D-forma A në 2D-formën B.



7. Detalisht përshkruaje transformimin nga 2D-forma A në 2D-formën B.



8. Detalisht përshkruaje transformimin nga 2D-forma Y në 2D-formën Z.



9. **a)** Vizato sistem koordinativ me vlera prej -6 deri 6 në dy boshtet e saja.

b) Shëno pikat me koordinata (2, 3), (3, 6) dhe (3, 3). Lidhi për të formuar trekëndësh. Ky trekëndësh le të jetë i shënuar me T.

c) Zmadho T me koeficient 2 dhe qendër zmadhimi (5, 6). Trekëndëshin e ri shënoje me U.

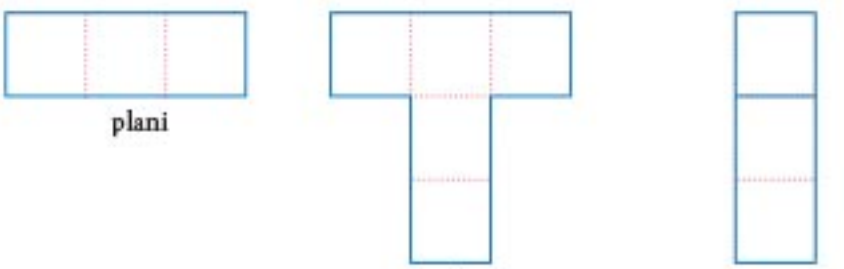
ç) Zmadho U me koeficient 2 dhe qendër zmadhimi (3, 6). Trekëndëshin e ri shënoje me V.

d) Bëje përshkrimin detal të vetëm të transformimit nga trekëndëshi T në trekëndëshin V.

Transformimi është zmadhim. Vizato drejtëzat që të caktosh qendrën e zmadhimit.

Detyra për përsëritje

1. Në vizatim janë paraqitur plani dhe dy projeksione të 3D-formës.

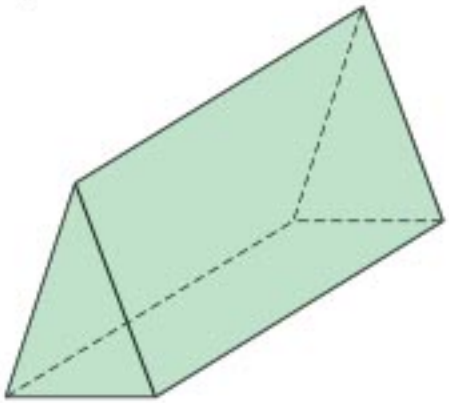


Vizato 3D-formën në fletë izometrike.

2. Vizato plan dhe projeksion të 3D-formës së dhënë.



3. **a)** Në vizatim është paraqitur prizmi me bazë trekëndësh barakrahës.

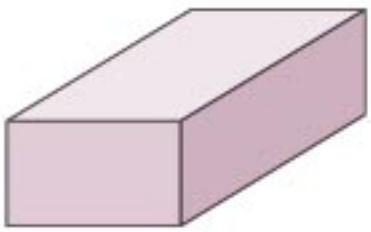


Në fletoren tënde vizatoje rrafshin e simetrisë për këtë 3D-formë.

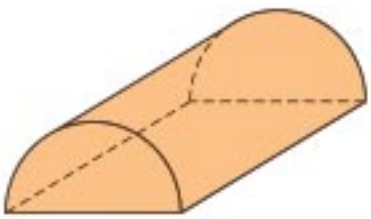
b) Cakto sa gjithsej rrafshe të simetrisë ka kjo 3D-formë.

4. Njehso sa rrafshe të simetrisë kanë këto 3D-forma:

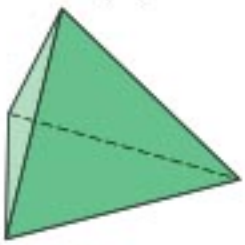
a) kuadri



b) prizmi me bazë gjysmërreth



c) piramida e rregullt trekëndore (piramidë me bazë trekëndësh barabrinjës)



5. Trekëndëshi i dhënë ka brinjët me gjatësi 4,5 cm, 2,5 cm dhe 4 cm.

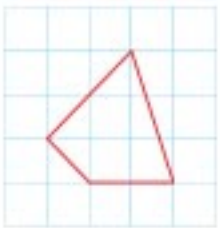
Rivizatoje trekëndëshin në fletore me katrorë.

Vizato mozaik prej trekëndëshit të dhënë.



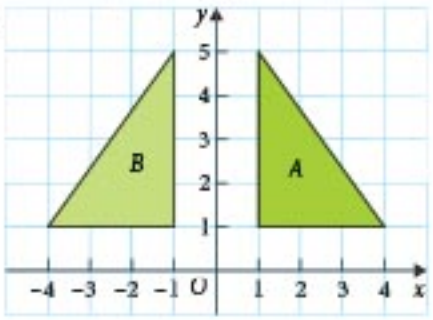
6. Rivizatoje katërkëndëshin në fletore me katrorë.

Vizato mozaik prej katërkëndëshit të dhënë.

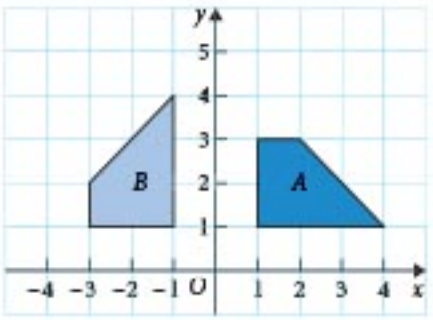


Në detyrat prej **7** deri **14**, tërësisht përshkruaje transformimin me të cilin 2D-forma A pasqyrohet në 2D-formën B.

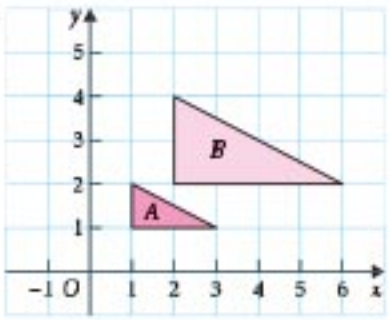
7.



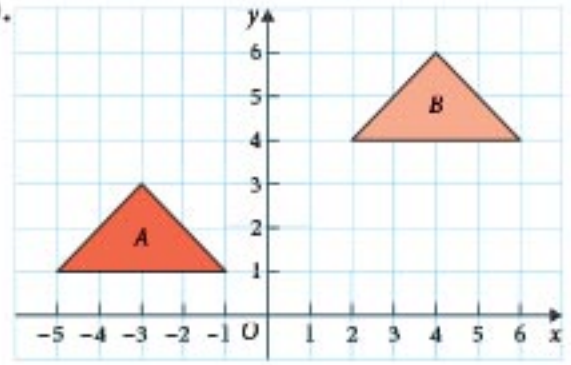
8.



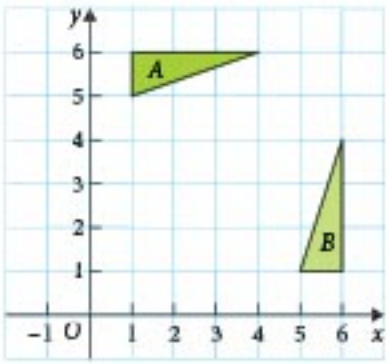
9.



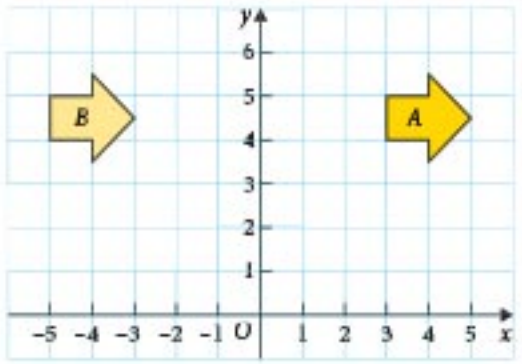
10.



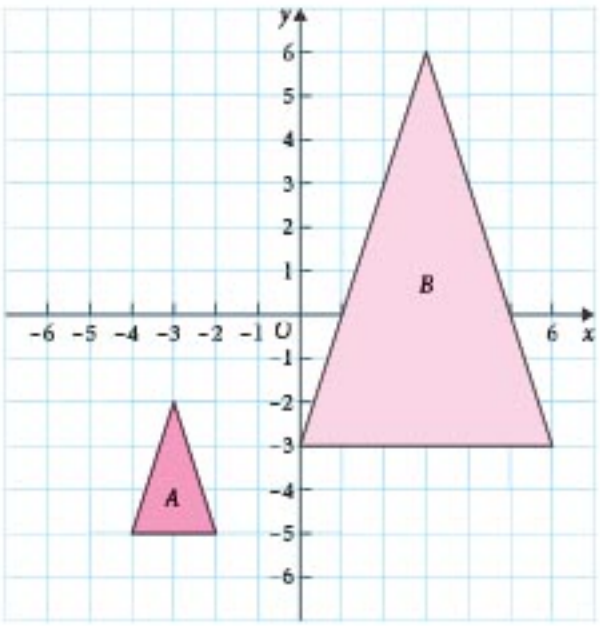
11.



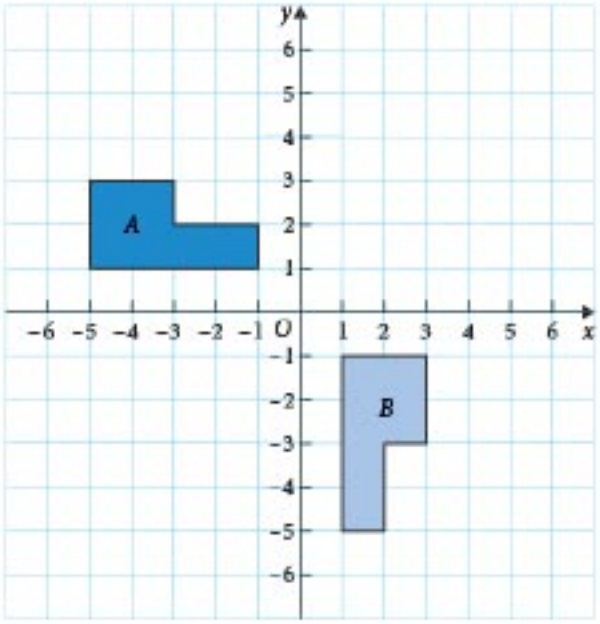
12.



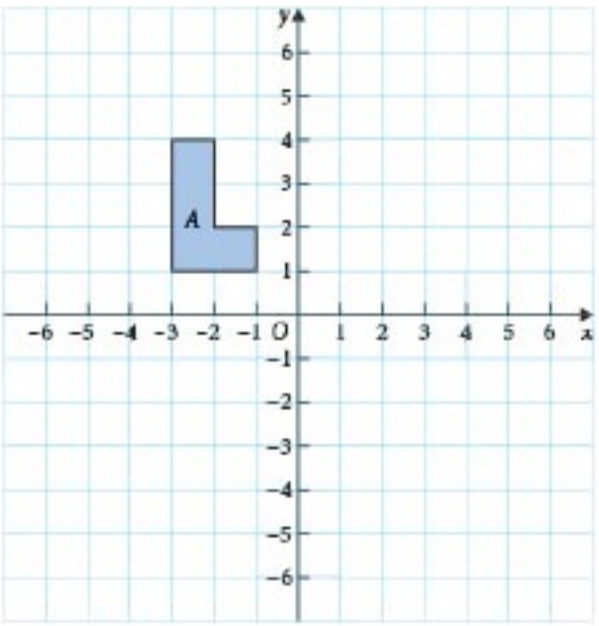
13.



14.



15. Kryeje vizatimin në fletore me katrorë.



a) Bëje rrotullimin e 2D-formës A për 180° rreth (1, 0).

2D-formën e re shënoje me B.

b) Gjeje figurën simetrike të 2D-formës B në lidhje me boshtin *y*.

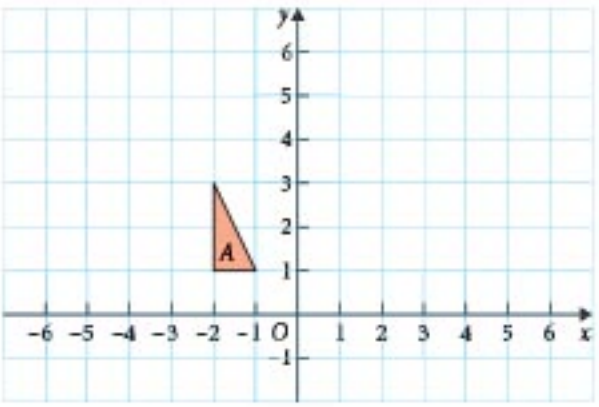
2D-formën e re shënoje me C.

c) Kryej translacion të 2D-formës B për vektorin (2, −2).

2D-formën e re shënoje me Ç.

ç) Bëj përshkrim detal në tërësi të transformimit të vetëm nga 2D-forma Ç në 2D-formën A.

16. Kryeje vizatimin në fletore me katrorë.



a) Zmadhoje trekëndëshin A me koeficient 2 dhe qendër (−4, 1).

2D-formën e re shënoje me C.

b) Gjeje pasqyrën e trekëndëshit B gjatë translacionit për vektorin (2, 1).

2D-formën e re me C.

c) Bëje përshkrimin detal të transformimit të vetëm nga A në C.

4 Matja dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Shndërron një njësi matëse në tjetër, për shembull njësia matëse për sipërfaqe mm^2 dhe cm^2, cm^2 dhe m^2 dhe njësia matëse për vëllim, për shembull mm^3 dhe cm^3, cm^3 dhe m^3; di dhe shfrytëzon raportin $1cm^3 = 1$ ml.
- Di se sipërfaqja tokësore matet me hektar (ha) dhe se 1 ha $= 10000$ m^2; shndërron hektarë në metra katrorë.
- Zgjidh probleme në lidhje me perimetrin dhe syprinën e rrethit, përfshin edhe përdorim të tastit π të kalkulatorit.
- Rrumbullakon numra deri në vende të caktuara dhjetore ose numër të caktuar të shifrave të rëndësishme; rrumbullakimin e përdor që të arrijë deri në zgjidhje të problemit deri në shkallë të caktuar saktësie.
- Zgjidh probleme në lidhje me matje në kontekste të ndryshme.

4.1 Shndërrimi i njësive matëse

Prefikset për njësitë matëse

Sistemi metrik i njësive matëse përmban njësi matëse për shumë madhësi të ndryshme.

Sistemi metrik ose Sistemi ndërkombëtar i njësive metrike (SI) është sistem i masave i cili bazohet në sistemin numerik dekad.

Per shembull, forca (njuten), intenziteti i rrymës elektrike (amper) dhe frekuenca (herc).

Deri tash u njohëm me njësitë matëse për gjatësi (**metër**), për masë (**gram**) dhe për vëllim (**litër**).

Njësitë më të mëdha dhe më të vogla i emërtojmë me shtim të prefiksit të njësisë matëse.

Kjo tabelë tregon disa prefikse për emërtim të masave më të mëdha nga njësia themelore matëse.

	deka	hekto	kilo	mega	giga	tera	peta
10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
një	dhjetë	njëqind	mijë	milionë	miliardë	bilionë	biliardë

Për shembull, njësia matëse për fuqi është vati.

Një milion vat është e barabartë me një megavat.

Tabela vijuese tregon disa prefikse për emërtim të masave më të vogla se njësia themelore matëse.

	deci	centi	mili	mikro	nano	piko	femto
10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
një	të dhjetat	të qindtat	pjesa e mijtë	pjesa e miliontë	pjesa e miliardët	pjesa e biliontë	pjesa e biliardët

Njësia matëse për energji është xhuli.

Një e miliardëta pjesë e xhulit është nanoxhul.

Prefikse më shpesh të përdorura janë **kilo**, **centi** dhe **mili**.

Shembulli 1

Plotësoji pohimet vijuese.

a) 2790 centimetra = ... metra

b) 5,8 litra = ... milimetra

c) 867 kilogramë = ... tone

a) $1\,\text{cm} = \frac{1}{100}\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = \frac{1}{100} \cdot 2790\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = 27{,}9\,\text{m}$

Shumëzimi me $\frac{1}{100}$ është e njëjtë me pjesëtimin me 100.

$2790 : 100 = 27{,}9\ \text{m}$

b) $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 1000 \cdot 5{,}8\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 5800\,\text{ml}$

c) $1000\,\text{kg} = 1\,\text{ton}$

1 ton = 1000 kilogramë.

$1\,\text{kg} = \frac{1}{1000}\ \text{tone}$

$867\,\text{kg} = \frac{1}{1000} \cdot 867\ \text{tone}$

$867\,\text{kg} = 0{,}867\ \text{tone}$

Shembulli 2

Hasani ka shtyllë druri të gjatë 2,4 metra.

Dëshiron ta ndajë në këtë mënyrë që të bëjë lodra të vogla.

I 4 copë të gjata nga 125 mm

II 7 copë të gjata nga 9,5 cm

III 2 copë të gjata nga 0,45 m

a) Njehsoje gjatësinë e përgjithshme që duhet ta presë.

Zgjidhjet shkruaji në centimetra.

b) Cila pjesë e drurit do të mbetet pasi Hasani do t'i presë copat e nevojshme?

a) I $4 \cdot 125 = 500$

$500\,\text{mm} = 50\,\text{cm}$

Katër pjesë kanë gjatësi të përgjithshme prej 50 cm.

II $7 \cdot 9{,}5 = 66{,}5$

Shtatë pjesë kanë gjatësi të përgjithshme prej 66,5 cm.

III $2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9$

$0{,}9\,\text{m} = 90\,\text{cm}$

Nëntë pjesë kanë gjatësi të përgjithshme prej 90 cm.

$50 + 66{,}5 + 90 = 206{,}5$

Gjatësia e përgjithshme që duhet ta presë Hasani është 206,5 cm.

b) $2{,}4\,\text{m} = 240\,\text{cm}$

$240 - 206{,}5 = 33{,}5\,\text{cm}$

Pasi e preu gjatësinë e nevojshme, kanë mbetur edhe 33,5 cm nga trau i drurit.

Detyra

1. Përshkruaji dhe plotësoji pohimet vijuese.

a) 84,9 kilometra = ... metra.

b) 129 centimetra = ... milimetra.

c) 37,5 tone = ... kilogramë.

ç) 8436 centimetra = ... metra.

d) 5,9 metra = ... milimetra.

dh) 21434 mililitra = ... litra.

e) 125 kilogramë = ... gramë.

ë) 8030 metra = ... kilometra.

2. Zgjedh njësi të drejtë matëse që t'i plotësosh pohimet vijuese.

a) Kalkulatori është i gjatë përafërsisht 16. .....

b) Fiksani i kafes nxë afër 300 .....

c) Krevati është i gjatë rreth 2 .....

ç) Laptopi ka masë afërsisht 2,25 .....

d) Largësia prej Shkupit deri Prilep është rreth 135 .....

dh) Lidhësja për letër është e gjatë rreth 30 .....

3. Në anën e djathtë është treguar receta për përgatitje të petullave.

1 gotë me miell ka masë 125 gramë.

1 ml ujë ka masë 1 gram.

Njehsoje masën e përgjithshme të të gjithë përbërësve në recetë.

Zgjidhjen shkruaje në kilogramë.



4. Një monedhë ka masë 2,268 gramë.

Elena gjeti strajcë me 960 monedha të tilla.

a) Njehsoje masën e përgjithshme, në kilogramë, të monedhave në strajcë.

Rrumbullakoje zgjidhjen në 2 vendeve dhjetore.

Së pari njehsoje masën e përgjithshme në gramë.

b) Trashësia e një monedhe është 1,35 milimetra.

Elena përpiqet t'i renditë monedhat njërën mbi tjetrën.

Sa do të jetë lartësia e monedhave të renditura?

Shkruaje zgjidhjen në metra.

Së pari njehsoje lartësinë e përgjithshme në metra.

5. **a)** Njehso sa centimetra ka në 1 kilometër.

b) Cila njësi matëse është e barabartë me 1000000000 miligramë.

Së pari shndërroje 1 km në metra.

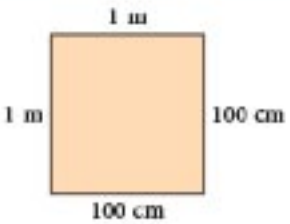
4.2 Syprina

Të shqyrtojmë katrorin me brinjë 1 metër.

Syprina e tij është $1\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m}^2$

Brinja e katrorit të tillë mund të themi po ashtu se është 100 centimetra.

Atëherë syprina është $100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 10000\text{ cm}^2$



Pra, $\mathbf{1\text{ m}^2 = 10000\text{ cm}^2}$

Nëse e shndërrojmë brinjën e katrorit të tillë në milimetra, ajo është e gjatë 1000 mm.

Atëherë syprina është $1000\text{ mm} \cdot 1000\text{ mm} = 1000000\text{ mm}^2$

Pra, $\mathbf{1\text{ m}^2 = 1000000\text{ mm}^2}$

Që të shndërrojmë njësi matëse për syprinë prej njërës në tjetër, **duhet ta kuadrojmë (ngritim në katror) koeficientin për shndërrim të gjatësive**.

Për shembull, 1 km = 1000 m.

Prandaj, $1\text{ km}^2 = 1000\text{ m} \cdot 1000\text{ m} = 1000000\text{ m}^2$.

Shembulli 1

Një fletë letre ka syprinën 220 cm².

Shndërroje syprinën në mm².

Kur shndërrojmë njësi matëse të syprinës prej njërës në tjetër, kuadrojmë koeficientin për shndërrim të gjatësisë.

1 cm = 10 mm — Ky është koeficient për shndërrim të gjatësisë.

1 cm² = 10 mm · 10 mm = 100 mm² — Ky është koeficient për shndërrim të syprinës.

220 cm² = 220 · 100 mm² = 22000 mm²

Shembulli 2



Një parcelë ka syprinën 0,3 km².

Sipërmarrësi dëshiron të ndërtojë shtëpi në atë parcelë.

Secila shtëpi duhet të ndërtohet në parcela të veçanta prej 600 m².

a) 0,3 km² shndërro në m².

b) Njehso sa gjithsej shtëpi mund të ndërtohen në tërë parcelën.

a) 1 km = 1000 m — Ky është koeficient për shndërrim të gjatësisë.

1 km² = 1000 m · 1000 m = 1000000 m² — Ky është koeficient për shndërrim të syprinës.

0,3 km² = 0,3 · 1000000 m² = 300000 m²

b) 300000 : 600 = 500

Mund të ndërtohen gjithsej 500 shtëpi në tërë parcelën.

Hektarët

Matja e tokës

Hektari është njësi për matje të syprinës tokësore.

Në numër më të madh të shteteve përdoret njësia hektar, por akoma ka shtete në të cilat përdoret edhe njësia akr.

Në të kaluarën është llogaritur se njësia matëse 1 akër i përgjigjet sipërfaqes që mund të lëvrohet gjatë një dite me një çift buall.

Një akër është përafërsisht e barabartë me sipërfaqen prej 0,4 ha, gjegjësisht rreth 4000 m².

Akri akoma përdoret në disa shtete, mes të cilave ShBA, Pakistan, Indi dhe Australi.



Syprina prej 0,3 km² në shembullin 2 është e mjaftueshme për 500 shtëpi.

Kjo tregon se 1 km² është sipërfaqe shumë e madhe.

Ekziston nevoja për njësi matëse për syprinën ndërmjet 1 m² dhe 1 km².

Njësi e tillë matëse është **hektari (ha)**.

1 ha = 10000 m²

Hektari përdoret për syprina të arave, fushave, parqeve dhe të ngjashme.

Shembulli 3

Shndërro.

a) 4,5 ha në m² **b)** 150000 m² në ha

a) 1 ha = 10000 m²

4,5 ha = 4,5 · 10000 m² = 45000 m²

Kur shndërrojmë nga njësi matëse më të madhe në njësi matëse më të vogël, atëherë shumëzojmë.

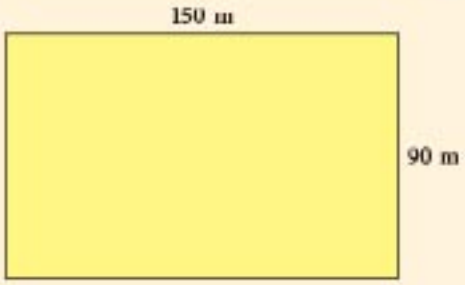
b) 10000 m² = 1 ha

$150000\ m^2 = \frac{150000}{10000}\ ha = 15\ ha$

Kur shndërrojmë nga njësi matëse më të vogël në njësi matëse më të madhe, atëherë pjesëtojmë.

Shembulli 4

Në vizatim është paraqitur plani i një are.



a) Njehsoje syprinën në m².

b) Njehsoje syprinën në hektar.

a) Syprina e drejtkëndëshit = gjatësia · gjerësia

Syprina = 150 m · 90 m

Syprina = 13500 m²

b) 1 ha = 10000 m²

$13500\ m^2 = \frac{13500}{10000} ha = 1{,}35\ ha$

Detyra

1. Përshkruaji dhe plotësoji pohimet e dhëna.

a) 1 m² = ...cm² **b)** 1 cm² = ... mm²

c) 1 km² = ... m² **ç)** 1 ha = ... m²

2. Shndërro në cm².

a) 3 m² **b)** 2,8 m² **c)** 400 mm² **ç)** 1000 mm²

d) 0,5 m² **dh)** 20 mm² **e)** 100 m² **ë)** 32 mm²

3. Shndërro në mm^2.

a) $4\ cm^2$ **b)** $7{,}5\ cm^2$ **c)** $2\ m^2$ **ç)** $6{,}8\ m^2$

4. Shndërro në m^2.

a) $3\ km^2$ **b)** $8000\ cm^2$ **c)** $9000000\ mm^2$ **ç)** $7{,}2\ km^2$

5. Shndërro në m^2.

a) 4 ha **b)** 12 ha **c)** 7,5 ha **ç)** 2,35 ha

6. Shndërro në hektar.

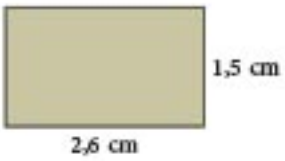
a) $60000\ m^2$ **b)** $150000\ m^2$ **c)** $85000\ m^2$ **ç)** $5000\ m^2$

7. Njehsoji syprinat e drejtkëndëshave.

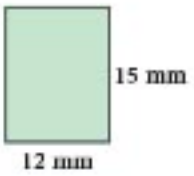
a)



b)



c)



Zgjidhjet shënoji në: I cm^2 II mm^2

8. Një teren loje ka formën drejtkëndëshe me dimensionet 165 metra dhe 88 metra.

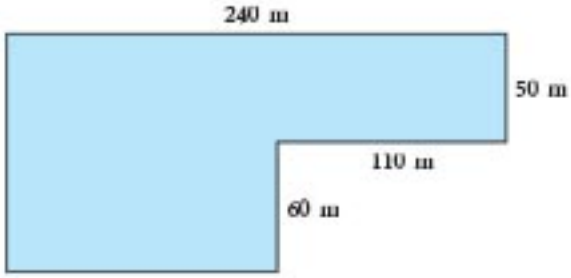
Njehsoje syprinën e saj në hektar.

9. Personi përgjegjës i kuajve njehsoi se çdo kafshë ka nevojë për 4000 m^2 sipërfaqe në fushë.

Njehso sa kuaj mund të ruhen në fushën që ka sipërfaqen 2 hektarë.

10. Në vizatim është paraqitur arë e madhe.

Ajo përbëhet prej dy arave drejtkëndëshe.



a) Njehsoje syprinën e arës në m^2.

Ndaje arën në dy drejtkëndësha që ta njehsosh syprinën e saj.

b) Shndërroje syprinën në hektarë.

11. Me një kanaqe ngjyrë mund të ngjyroset sipërfaqe drurore prej 1,5 m^2.

Selveti ka 12 copë dërrasa dhe secila ka formën e drejtkëndëshit me dimensione 35 cm dhe 40 cm.

Kujdes, përdoren njësi të ndryshme matëse. Gjatësitë janë në cm, kurse syprinat në m^2.

a) Njehsoje syprinën e një dërrase.

b) Njehso një kanaqe ngjyrë a është e mjaftueshme për t'i ngjyrosur 12 dërrasat.

12. Fleta në formatin A4 ka syprinë që është sa gjysma e syprinës së fletës në formatin A3.

Fleta në formatin A3 ka syprinë që është sa gjysma e syprinës së fletës në formatin A2.

Fleta në formatin A2 ka syprinë që është sa gjysma e syprinës së fletës në formatin A1.

Fleta në formatin A1 ka syprinë që është sa gjysma e syprinës së fletës në formatin A0.

Fleta në formatin A0 ka syprinën 1 m^2.

a) Shkruaj si thyesë syprinën e fletës në formatin A0 në raport me syprinën e fletës në formatin A4.

b) Njehsoje syprinën e fletës në formatin A4 në cm^2.

Në fillim shndërroje syprinën e A0 në cm^2.

13. Syprina e një parcele është 0,3 km^2.

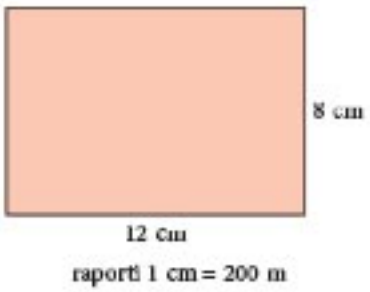
a) Shndërroje syprinën në hektarë.

b) Sa hektarë ka në 1 km^2?

Në fillim shndërro në m^2.

14. Dimensionet e pyllit të paraqitur në hartë janë 12 cm dhe 8 cm.

Raporti i hartës është 1 cm = 200 m.



a) Njehsoje syprinën e pyllit në hartë në cm^2.

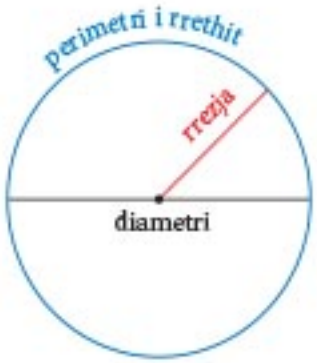
b) Njehsoje syprinën e vërtetë të pyllit në m^2.

Përdore raportin që t'i shndërrosh gjatësitë në metra para se ta njehsosh syprinën.

c) Zgjidhjen shënoje në hektarë.

4.3 Rrethi

Perimetri i rrethit



Në klasën VIII mësuam si njehsohet **perimetri** i rrethit, P, nëse dihet diametri d ose rrezja r.

$P = \pi d$ ose $P = 2\pi r$

π (lexohet "pi") dhe është përafërsisht e barabartë me 3,142.

Në kalkulatorë ka tast π i cili më preciz jep vlerën e π.

Në kalkulatorë me siguri do të paraqitet vlera 3,141592654.

Ekzistojnë kalkulatorë edhe më precizë.

Shembulli 1

Njehso perimetrin e 2D-formave. Zgjidhjet të jenë të rrumbullakuara në 3 shifra të rëndësishme.

a) Rreth **b)** Gjysmërreth **c)** Çereku i rrethit







a) Rrezja është 4,6 cm.

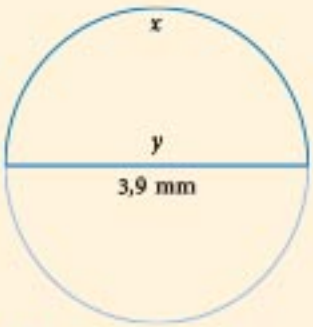
$P = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}6$ E përdorim formulën $P = 2\pi r$

$= 28{,}90265241$ I njehsuar numri π me kalkulator.

$= 28{,}9$ cm I rrumbullakuar në 3 shifra të rëndësishme.

b) 2D-forma është e përbërë nga gjysmë rrethi dhe diametri i atij rrethi.

Gjatësia e gjysmës së rrethit x është e barabartë me gjysmën e perimetrit të rrethit të plotë.



$x = \frac{\pi \cdot 3{,}9}{2}$ Meqenëse $\frac{\pi d}{2}$ është gjysma e perimetrit

$x = 6{,}126105675$ mm I njehsuar numri π me kalkulator.

Pjesa e dytë e 2D-formës është diametri.

$y = 3{,}9$ mm

Perimetri i tërë figurës $= x + y$

$= 6{,}126105675\text{mm} + 3{,}9\text{mm}$

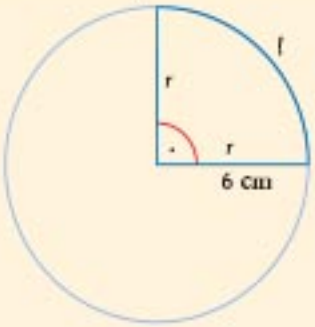
$= 10{,}02610567\text{mm}$

$= 10{,}0$ mm I rrumbullakuar në 3 shifra të rëndësishme.

c) Kjo 2D-formë është një e katërta e rrethit.

2D-forma është e përbërë nga një e katërta e rrethit i kufizuar me hark rrethor dhe dy rreze.

Gjatësia e harkut l është e barabartë me një të katërtën e perimetrit të rrethit.



$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{4}$ Meqenëse $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$ është një e katërta e perimetrit.

$= 9{,}424777961$ I njehsuar numri π me kalkulator.

Të dy segmentet janë të barabarta me rrezen, $r = 6$ cm.

Perimetri i tërë figurës $= l + 2r$

$= 9{,}424777961 + 2 \cdot 6$

$= 21{,}424777961$

$= 21{,}4$ cm I rrumbullakuar në 3 shifra të rëndësishme.

Syprina e rrethit

Formula për syprinën S të rrethit me rreze r është:

$\mathbf{S = \pi r^2}$

Shembulli 2

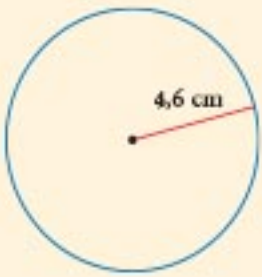
Gjeje syprinën e 2D-formave nga shembulli i mëparshëm.

a) Rrezja e rrethit është 4,6 cm.

$S = \pi \cdot 4{,}6^2$ Prej $S = \pi r^2$

$= 66{,}47610055$ I njehsuar numri π me kalkulator.

$= 66{,}48$ cm² I rrumbullakuar në 2 vende dhjetore.



Njësia matëse është cm² pasi e njehsojmë syprinën.

b) Syprina e gjysmërrethit është gjysma e syprinës së rrethit.

Diametri është 3,9, prandaj rrezja është $3{,}9 : 2 = 1{,}95$ mm

$S = \frac{\pi \cdot 1{,}95^2}{2}$ Gjysma e syprinës $= \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

$= 5{,}972953033$ I njehsuar numri π me kalkulator.

$= 5{,}97$ mm² I rrumbullakuar në 2 vende dhjetore.



c) Syprina e çerekut të rrethit është syprina e rrethit e pjesëtuar me 4.



Rrezja është 6 cm

$S = \frac{\pi \cdot 6^2}{4}$ Çereku i syprinës $= \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

$= 28{,}27433388$ I njehsuar numri π me kalkulator.

$= 28{,}27\ \text{cm}^2$ I rrumbullakuar në 2 vende dhjetore.

Detyra

Në detyrat e mëposhtme zgjidhjet rrumbullakoji në tri shifra të rëndësishme.

1. Njehsoje perimetrin e 2D-formave:

a)



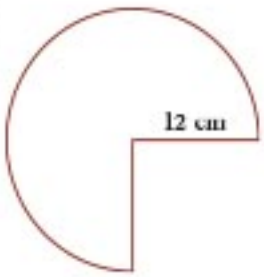
b)



c)

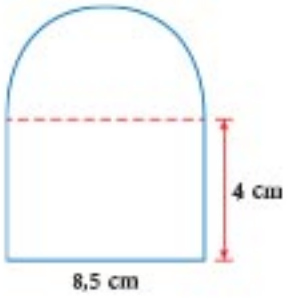


ç)



2. Njehsoje syprinën e çdo nga 2D-format nga detyra e mëparshme.

3. Kjo 2D-formë është e përbërë prej drejtkëndëshit dhe gjysmë rrethi.

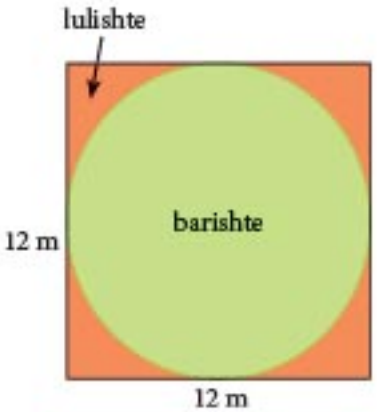


Njehso: **a)** syprinën e 2D-formës

b) perimetrin e 2D-formës.

4. Një kopsht ka formën katrore me brinjë 12 metra.

Kopshti ka barishte rrethore që i prek gjitha brinjët. Në secilin kënd ka lulishte. Në vizatim është paraqitur plani i kopshtit.



a) Njehsoje syprinën e tërë kopshtit.

b) Njehsoje syprinën e pjesës me bar (barishte).

c) Njehsoje syprinën e vetëm një lulishteje.

5. Njehso diametrin e vijës rrethore (qarkut) me perimetër:

a) 25 cm **b)** 76 mm **c)** 5 m

6. Njehso rrezen e vijës rrethore (qarkut) me perimetër:

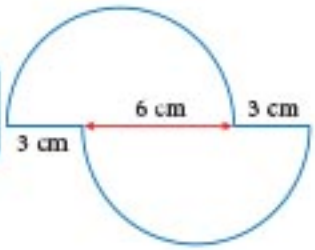
a) 65 cm **b)** 5,9 mm **c)** 2,5 m

7. Logoja e një kompanie është krijuar prej dy gjysmërrathëve.

a) Njehsoje syprinën e logos.

b) Njehsoje perimetrin e logos.

3D-forma është e përbërë prej dy gjysmërrathëve.

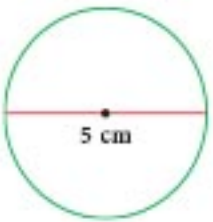


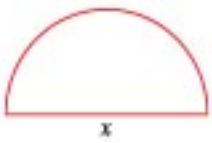
Duhet t'i mbledhësh gjatësitë e vijave të drejta me gjatësitë e pjesëve rrethore.

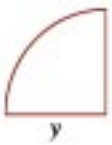
8. Të gjitha 2D-format të treguara më poshtë kanë perimetra të barabarta.

Njehsoni gjatësitë e segmenteve të shënuara me shkronja x dhe y.

Në fillim njehsoje perimetrin e rrethit. Pastaj shfrytëzoje për njehsim të perimetrit të 3D-formave të tjera, ashtu që do të përpilosh barazim me gjatësinë e dhënë të panjohur.







9. Një rreth ka syprinë 14,8 cm².

Njehso rrezen e rrethit.

Zgjidhe barazimin $\pi r^2 = 14{,}8$

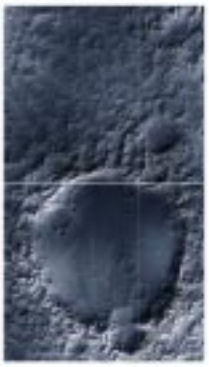
10. Në vizatimin është paraqitur krater rrethor në sipërfaqe të Hënës.

Është bërë vlerësim se perimetri i kraterit është 120 km.

Njehsoje syprinën e sipërfaqes që ka përfshirë krateri.

Në fillim njehso rrezen e kraterit.

Vizatime jo me madhësi reale



Detyra për përsëritje

1. Një tullë ndërtimore ka masën 2,7 kg.

Njehsoje masën e 840 tullave.

Zgjidhjen shkruaje në tone.



2. Zorica ka bokall me 3 litra lëng portokalli.

Njehso sa gota me nga 180 mililitra mund të mbushë me lëng.

3. Marko ka një copë druri të gjatë 2,8 metra.

Dëshiron ta ndajë në copa të vogla të gjata 12 centimetra.

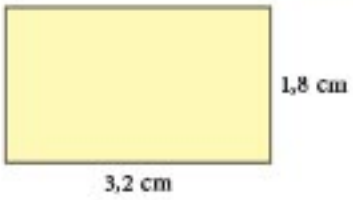
Njehso në sa copa të vogla mund ta presë drurin.

4. Monedha prej 1 denari ka masë 5,10 gramë.

Stefani ka arkë në të cilën ka 500 denarë në monedha me nga 1 denar.

Njehsoje masën e përgjithshme të monedhave nga arka në kilogramë.

5. **a)** Njehsoje sipërfaqen e drejtkëndëshit në cm^2.



b) Njehsoje sipërfaqen në mm^2.

6. Shndërro syprinat e dhëna në cm^2.

a) 2 m^2 **b)** 200 mm^2

c) 6,5 m^2 **ç)** 5000 mm^2

7. Shndërro në m^2

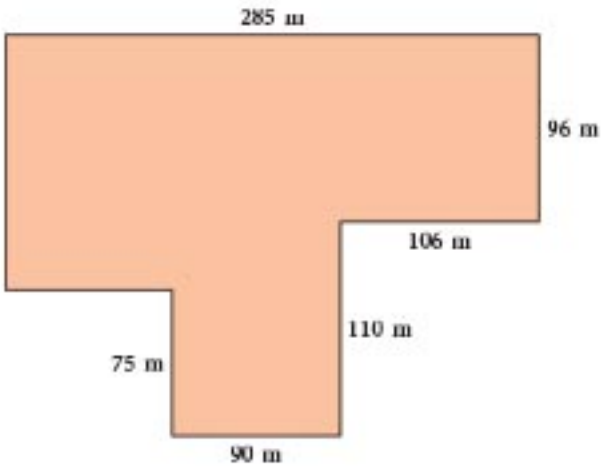
a) 4 km^2 **b)** 80000 cm^2

c) 9,6 km^2 **ç)** 5000000 mm^2

8. Një fushë e futbollit ka dimensione 195 metra dhe 96 metra.

Njehsoje syprinën e saj në hektarë.

9. Në vizatim është treguar plani i tokës ndërtimore.



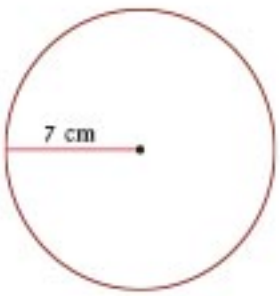
a) Njehsoje sipërfaqen e tokës në m^2.

b) Shndërroje zgjidhjen në hektarë.

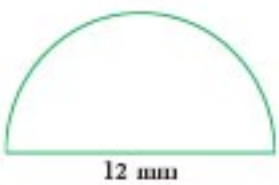
10. Njehsoji perimetrat e 2D-formave vijuese.

Rrumbullako zgjidhjen në 3 shifra të rëndësishme.

a)



b)

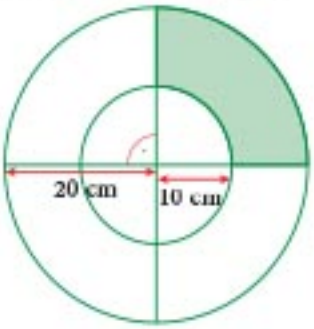


c)



11. Njehsoji syprinat e 2D-formave të detyrës së mëparshme.

12. 2D-forma është e përbërë prej dy rrathëve me qendër të përbashkët, njëri me rreze 20 cm, kurse tjetri me rreze 10 cm.



Ajo është ndarë në katër çerekë.

Njehsoje sipërfaqen e pjesës së ngjyrosur.

Zbrit $\frac{1}{4}$ nga syprina e rrethit të vogël prej $\frac{1}{4}$ nga syprina e rrethit të madh.

5 Puna me të dhëna dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Propozon pyetje për hulumtim, duke përdorur metoda statistikore; identifikon bashkësinë e të dhënave që janë të nevojshme dhe si ato të grumbullohen; përcakton madhësinë e mostrës dhe shkallën e saktësisë.
- Identifikon burime primare ose sekondare për të dhëna përkatëse.
- Përpunon, teston dhe e spastron listën e të dhënave të grumbulluara.
- E shqyrton dhe e vlerëson efikasitetin e strategjive dhe qasjeve të ndryshme dhe e përmirëson mënyrën e zgjidhjes.
- Përpunon dhe përdor instrument për grumbullim të të dhënave ose pyetësor për anketë të thjeshtë.
- Në mënyrë precize identifikon, organizon, prezanton dhe interpreton informata në formë të shkruar, tabelare, grafike dhe me diagram.
- Grumbullon dhe rendit të dhëna diskrete dhe të vazhdueshme, përzgjedh intervale klase të barabarta përkatëse atje ku është e nevojshme.
- Përzgjedh, vizaton dhe interpreton diagrame dhe grafike, duke përfshirë:
  - diagrame për frekuenca për të dhëna diskrete dhe të vazhdueshme;
  - grafik vijor për periodë kohore;
  - diagrame me pika, që të zhvillohet të kuptuarit për korrelacion;
  - diagrame trung-gjethe të njëpasnjëshme.
- Krahason dy ose më tepër shpërndarje; sjell përfundime duke e përdorur formën e shpërndarjes dhe statistikën përkatëse.
- Kryen njehsime statistikore dhe përzgjedh statistikë e cila më së shumti është e ndërlidhur me problemin.
- I lidh rezultatet dhe konkluzionet me çështjen fillestare.

5.1 Planifikimi i hulumtimit

Përzgjedhja e pyetjeve për hulumtim

Para se seriozisht t'i qasemi fillimit të hulumtimit statistikor, duhet të mendojmë mirë si do ta formulojmë pyetjen ose pyetjet që do t'i parashtrojmë. Kjo do të ndihmojë të vendosim çfarë të dhëna të grumbullojmë dhe si t'i grumbullojmë.

Patjetër të jemi të sigurt që pyetja është e qartë.

Gjithnjë është më mirë të shtrojmë dy pyetje më të shkurta se sa t'i kombinojmë në një pyetje të gjatë.

Shembulli 1

Jovana do të bëjë hulumtim statistikor në lidhje me futbollin.

Propozo:

a) dy pyetje që ajo duhet t'i parashtrojë

b) të dhëna të nevojshme për secilën nga pyetjet e parashtruara.

Pyetja 1

a) Jovana kishte mundur të pyesë: "Ekipet futbolliste a shënojnë më tepër gola kur ka më tepër publik në tribuna?"

b) Asaj i janë të nevojshme numri i shikuesve të pranishëm dhe rezultati final për numër të caktuar të garave futbolliste.

Pyetja 2

a) Jovana kishte mundur të pyesë: "A është portieri më i lartë se lojtarët e tjerë?"

b) Asaj i janë të nevojshme informatat për lartësinë e lojtarëve.

Shembulli 2

Sinani dëshiron të bëjë hulumtim statistikor për pushimet vjetore.

Propozo:

a) dy pyetje që ai duhet t'i parashtrojë.

b) të dhëna të nevojshme për të dy pyetjet e parashtruara.

Pyetja 1

a) Sinani kishte mundur të pyesë: "Pushimet vjetore në vendet më të ngrohta a janë më të shtrenjta se sa në ato më të ftohtat?"

b) Atij i janë të nevojshme temperaturat mesatare për më tepër vende, si dhe shpenzimet për qëndrim në ato vende.

Pyetja 2

a) Sinani kishte mundur të pyesë: "Njerëzit a parapëlqejnë të pushojnë në vende më të ngrohta?"

b) Ai do duhej të pyesë më tepër njerëz ku parapëlqejnë të shkojnë në pushime dhe t'i pyesë a është ai shkaku për vizitën e tyre atje.

Burimet e të dhënave

Mund të përdorim **të dhëna primare**. Ato janë të dhëna që i grumbullojmë vet.

Mund të përdorim **të dhëna sekondare**. Ato janë të dhëna që dikush tjetër tanimë i ka mbledhur.

Ekzistojnë shumë burime të të dhënave sekondare. Shumë qeveri shpallin statistika nacionale. Në internet ka në dispozicion shumë baza të të dhënave dhe almanake (almanak është libër referues që zakonisht shpallet në çdo vit).

Përcaktimi i mostrës

Tërë grupin që është në interes të hulumtimit e quajmë **popullim**.

Ndoshta nuk do të jetë e mundur t'i parashtrojmë pyetje secilit njeri nga popullimi.

Kur përzgjedhim vetëm një pjesë të popullimit, pjesën nga tërë popullimi që e kemi zgjedhur e quajmë **mostër**.

Rreth 10% e popullimit shpesh është madhësi e logjikshme e mostrës. Zakonisht, është i mjaftueshëm minimum rreth 30 njerëz.

Metodat për përzgjedhjen e të dhënave

Kur vetvetiu duhet të grumbullojmë të dhëna, duhet të zhvillojmë **hulumtim**.

Mundemi t'i parashtrojmë pyetje njerëzve me ndihmë të **pyetësorit** ose përmes **intervistës**.

Pyetësori zakonisht është i shtypur në fletë dhe njerëzit vetë përgjigjen pyetjeve në të.

Gjatë intervistë, ne drejtpërdrejt i parashtrojmë pyetjet.

Kur duhet t'i shënojmë rezultatet për ndonjë ndodhi, duhet të zhvillojmë **eksperiment** ose t'i shënojmë **vëzhgimet**.

Kur i shënojmë matjet është e nevojshme të jemi të sigurt se përdorim **shkallë saktësie** adekuate. Për shembull, nëse e matim kohën e nevojshme për vrapim 100 m dhe nëse e shënojmë kohën e rrumbullakuar deri në sekondën më të afërt, mund të ndodhë numri më i madh i kohëve të jetë i barabartë. Matja deri në një të dhjetën e sekondës do të ishte shkallë më e mirë saktësie.

Shembulli 3

Si kishe për t'i grumbulluar të dhënat që t'i pergjigjesh pyetjeve në vijim?

a) Cila nga llojet e muzikës është më popullarizuese mes nxënësve në një klasë?

b) Cila ngjyrë e automobilit është më popullarizuese?

c) A është më me gjasë, ana e lyer e bukës me pekmez të bjerë po në atë anë kur na bie në tokë?

a) Do të bëjmë hulumtim.

Mund t'i pyesim nxënësit e klasës. Mund ta intervistojmë çdo nxënës ose çdonjëri prej tyre të plotësojë pyetësorin, i cili është paraprakisht i përgatitur.

b) Do t'i shënojmë vëzhgimet.

Do të mundeshim t'i shënojmë ngjyrat e automobilave në parkingun e shkollës ose derisa ato kalojnë para hyrjes së shkollës.

c) Do të bëjmë eksperiment.

Do të mundeshim të lëshojmë disa herë lirisht në dysheme një copë bukë të lyer me pekmez dhe të shënojmë se ajo a bie (përplaset me tokë) në anën e lyer apo jo.

Shembulli 4

Jovana dëshiron t'i zbulojë lartësitë e 20 anëtarëve të ekipit të saj hendbollistik.

a) A duhet ajo të pyesë secilin anëtar të ekipit apo të marrë vetëm mostër?

b) Çfarë shkalle të saktësisë duhet të përdorë Jovana?

a) Jovana duhet ta pyesë secilin anëtar të ekipit pasi që janë vetëm 20 anëtarë.

b) Matjet e rrumbullakuara në centimetrin më të afërt do të jenë të mjaftueshme.

Detyra

1. Propozo një pyetje që kishte mundur të parashtrohet, si dhe të dhënat të cilat janë të nevojshme për të hulumtuar në lidhje me:

a) tenisin

b) blerjen e instrumentit muzikor

c) kohën

ç) blerje e automobilit nga ana e një tetëmbëdhjetëvjeçari

2. A do kishe përdorur të dhëna primare apo sekondare për të hulumtuar në lidhje me:

a) lartësitë e nxënësve në klasën tënde.

b) shprehitë e reciklimit në qytetin tuaj, respektivisht fshat.

c) shprehitë e reciklimit në shtetin tënd.

ç) sipërfaqen e shteteve në botë.

d) kushtet kohore.



3. Përzgjedh hulumtim, eksperiment ose vëzhgim që të zbulosh cila metodë do të ishte më e mira për grumbullimin e të dhënave për:

a) të zbuluar se cili lloj filmi është më popullarizues mes nxënësve në paralelen tënde.

b) hulumtim të numrit të personave që voziten në vetura.

c) hulumtim të numrit të kafshëve të preferuara që njerëzit i kanë në qytetin tuaj, respektivisht fshatin tuaj

ç) të zbuluar se tinejxherët a kanë reflekse më të shpejta se sa personat e rritur.

d) të zbuluar se një pleh artificial a është më i mirë se tjetri.

dh) të zbuluar se baseni i ri për notim a është më i mirë se i vjetri.

e) të zbuluar sa njerëz e shfrytëzojnë basenin e ri për not çdo ditë.

4. Drejtuesi (menaxheri) i klubit të futbollit do të zbulojë se tifozët a duan shërbime shërbyese gjatë luajtjes së ndeshjeve.

a) Sqaro përse drejtuesi duhet të pyesë mostra të caktuara të tifozëve.

b) Sa tifozë duhet të pyesë menaxheri?

5. Një kompani prodhon 1000 llamba çdo ditë.

Menaxherët e kompanisë duan t'i testojnë llambat e prodhuara për të zbuluar jetëgjatësinë mesatare të një llambe.

a) Përmend dy shkaqe përse kompania duhet të përdorë mostër.

b) Sa llamba duhet të ketë në mostër?

c) Propozo shkallë të saktësisë që mund ta përdorin gjatë matjes së jetëgjatësisë së llambave.

6. Çfarë shkalle e saktësisë do të ishte adekuate për hulumtim të:

a) kohës që një grup njerëz e shpenzojnë për ushtrime

b) kohës së nevojshme për një atlet olimpik që të vrapojë 100 metra

c) distancës mes dy qyteteve.

ç) sasisë së ujit që çdo ditë harxhojnë familjet.



7. Marina është pronare e një salloni bukurie në një qytet të madh. Ajo mendon të hapë edhe një sallon të tillë në qytetin e njëjtë.

Në grupe prej dy apo tre, debatoni dhe pastaj shënoni përgjigjet në lidhje me këto punë:

a) Propozoni pyetje që ajo duhet të parashtrojë.

b) Cilat të dhëna i janë të nevojshme Marinës që ta sjellë vendimin e merituar?

c) Këto të dhëna a janë primare apo sekondare?

ç) Cilën metodë të grumbullimit duhet ta përdorë që t'i fitojë të dhënat?

d) Cilët faktorë të tjerë do të kishte mundur t'i marrë parasysh?

Mos harro se qyteti është i madh, pra ka shumë njerëz të cilët jetojnë ose punojnë në të.

8. Kire do të zbulojë a është duke u përmirësuar klubi i tij i adhuruar i basketbollit.

Në grupe prej nga dy apo tre, debatoni për çështjen dhe pastaj shkruani përgjigjet në lidhje me këto punë:

a) Propozoni pyetje që duhet ta parashtrojë Kire.

b) Cilat të dhëna i nevojiten?

c) Këto të dhëna a janë primare apo sekondare?

ç) Cilët faktorë të tjerë do të kishte mundur t'i marrë parasysh?

Ekzistojnë dy grupe njerëz të cilët mund të jetë të kyçur – shikues dhe lojtarë. Që të dy duhet të merren parasysh.

5.2 Instrumenti për mbledhjen e të dhënave

Pyetësori i parë

Ser Frensis Galton ishte lindur në Birmingen në vitin 1822.

Ai i pari solli përdorimin e hulumtimit dhe pyetësorëve për përzgjedhje të informacioneve në bashkësitë qytetare.

Pyetësorët dhe hulumtimet sot kanë zbatim shumë më të gjerë.

Ato japim shumë informacione të dobishme që mund të ndihmojnë gjatë planifikimit dhe krijimit të politikave.



Instrumentet për grumbullimin ose mbledhjen e të dhënave duhet të jenë të lehta për shfrytëzim dhe të mundësojnë mbledhjen (grumbullimin) e të dhënave të kërkuara.

Kur bëjmë vetë ndonjë instrument për grumbullimin e të dhënave, mirë është të testohet para përdorimit për grumbullimin e të dhënave. Prandaj bëjmë eksperiment që të jemi të sigurt se instrumenti për grumbullimin e të dhënave:

- është i lehtë për përdorim
- vërtet i grumbullon të dhënat të cilat janë të nevojshme.

Për grumbullim të të dhënave të shumta, më shpesh përdorim tabelë të frekuencës.

- Nëse ekzistojnë shumë vlera të ndryshme, atëherë më mirë është të ndahen në grupe.
- Grupet duhet të kenë madhësi të barabarta.
- Zakonisht pesë deri në tetë grupe duhet të jenë të mjaftueshme. Përdorimi i më shumë se tetë grupeve jep më shumë detaje, kurse më pak se pesë grupe nuk ka detaje të mjaftueshme.
- Grupet duhet të mundësojnë të shënuarit e vlerës më të madhe dhe më të vogël.

Kur i caktojmë grupet, duhet të kemi kujdes:

- të mos ketë zbrazëtira
- të mos ketë përputhje.

Shembulli 1

Merita mbledh informata për të hollat ditore të cilat marrin me vete nxënësit e klasës së saj.

Pret që vlera më e vogël të jetë 30 denarë, kurse vlera më e madhe 210 denarë.

Bëj instrument për mbledhjen e të dhënave që do ta kishte mundur ta përdorë Merita.

Kjo tabelë e frekuencave do të ishte më adekuate.

Të hollat ditore, denarë	Vijëzat	Frekuenca
$0 < p \leq 50$		
$50 < p \leq 100$		
$100 < p \leq 150$		
$150 < p \leq 200$		
$200 < p \leq 250$		

Ka shumë grupe tjera që mund të përdoren.

Për shembull, $20 < p \leq 70, 70 < p \leq 120$, por më lehtë është të punojmë me numrat në grupet e dhëna në tabelë.

Shembulli 2

Nikolla mbledh informata për lartësinë e nxënësve në klasën e tij.

Ai vendosi ta përdorë këtë tabelë.

Lartësia, cm	Vijëzat	Frekuenca
140 - 150		
150 - 160		
165 - 180		

Gjej katër vërejtje për tabelën.

Ekziston zbrazëtirë pasi nuk ka ku të shënohet lartësia prej 162 cm, për shembull.

Ekziston përputhje pasi që lartësia prej 150 cm do t'i takonte të dy grupeve.

Klasat (grupet) nuk kanë madhësi të njëjtë.

Me këto tre grupe nuk mund të grumbullohen detaje të mjaftueshme.

Pyetësorët

Duhet të përdoren pyetje të cilat mund të përgjigjen shumë shpejt. Pyetjet duhet të jenë lehtë të kuptueshme, përndryshe nuk do t'i japin informatat e duhura.

Për shembull, në pyetjen "Sa merresh me sport?" disa prej njerëzve do të përgjigjeshin "shumë", kurse të tjerët ndoshta do të përgjigjen "disa orë në javë".

Pyetjet nuk duhet të jenë ofenduese.

Për shembull, shumë njerëz nuk duan ta zbulojnë moshën e saktë të tyre. Prandaj, më mirë do të ishte të ofrohen të ashtuquajtura rang për moshë, si për shembull, prej 20 deri 29 vjet, prej 30 deri 39 vjet etj.

Pyetjet nuk duhet të shprehin lavdërim.

Për shembull, "Çfarë mendon për basenin e ri të mrekullueshëm në...?" është një pyetje që do të detyronte shumë njerëz të pajtohen. Qëllimi i pyetësorit është t'i zbulojë mendimet e njerëzve, e jo t'i detyrojë njerëzit të pajtohen.

Njerëzit nuk duan të harxhojnë shumë kohë në të përgjigjurit e pyetësorëve. Pyetjet e llojit

Po/Jo dhe pyetjet me fushë për vërtetim (katror të zbrazët afër pyetjes) janë të shpejta për t'u përgjigjur.

Fushat për vërtetim duhet të:

- mos kenë zbrazëtira
- nuk kanë përputhje
- e përfshijnë tërë rangun e përgjigjeve
- janë "në baraspeshë" ashtu që do të ketë numër të njëjtë të përgjigjeve pozitive dhe negative për mendimet.

Pyetësorët zakonisht duhet të testohen para përdorimit.

Synimi i testimeve është të kontrollohet se:

- pyetësorët janë të kuptueshëm
- i sigurojnë informatat e duhura.

Shembulli 3

Andreu do të zbulojë sa kohë kalojnë nxënësit e klasës së tij duke përcjellë televizionin.

Ai shqyrton dy pyetje të mundshme:

I Sa shikon televizion?

II Sa orë kalon në shikimin televizion?

a) Gjeje nga një vërejtje për të dy pyetjet.

b) Shkruaj pyetje më të mirë që do të kishte mundur ta përdorë Andreu.

a) I Nuk është e qartë cili lloj i përgjigjes kërkohet. Disa nxënës mund të përgjigjen "shumë" ose "jo shumë".

II Nuk ka periudhë kohore në pyetje. Disa pyetje ndoshta do t'i referohen një mbrëmjeje, të tjerat për një javë ose tjetër periudhë kohore. Kurse disa të tjerë ndoshta nuk kanë mbajtur mend saktë.

b) Sa orë shikoje televizion dje mbrëma?

- ☐ Jo aspak
- ☐ Më pak se 1 orë
- ☐ Prej 1 deri 2 orë
- ☐ 2 orë ose më gjatë

Detyra

1. Elena do të dijë sa njerëz voziten në automobilat që kalojnë përskaj shkollës.

a) Dizajno instrument për mbledhjen e të dhënave që ajo do të mund ta shfrytëzojë për grumbullimin e këtyre të dhënave.

b) Nëse mundesh ta bësh këtë sigurt, nën mbikëqyrje të arsimtarit tënd, plotësoje formularin tënd për të dhëna me numërim të numrit të njerëzve në automobilat që kalojnë përskaj shkollës tënde në periudhë të caktuar kohore.

2. Nevena dëshiron të dijë se në emisionin e saj të preferuar televiziv ka më shumë reklama se sa emisione të tjera.

a) Dizajno instrument për mbledhjen e të dhënave që ajo do të mund ta shfrytëzojë për grumbullimin e këtyre të dhënave.

b) Zgjidhni disa emisione televizive dhe plotësoni formularin me të dhëna duke krahasuar numrin e reklamave në to me numrin e reklamave në emisionin tuaj të preferuar televiziv.

3. Mile kultivon dy lloj fasule në kopshtin e tij.

Ai do të zbulojë cili lloj prej një rrënje jep më tepër fasule.

Ai di se prej asnjë rrënje nuk fitohet më pak se 9 kokrra fasule dhe më tepër se 51 kokrra fasule.

Përdor grupe adekuate, si dhe atë, se ekzistojnë dy lloje fasule.

Përpilo instrument për mbledhjen e të dhënave që do të mund ta përdorë.

4. Kaltrina e përpiloi këtë instrument për grumbullimin e të dhënave që të hulumtojë sa shpesh njerëzit përdorin autobus lokal për transport.

Sa shpesh e përdor autobusin lokal?

- ❑ Asnjëherë
- ❑ Ndonjëherë
- ❑ Shpesh
- ❑ Çdoherë

a) Shkruaj dy parregullsi për këtë instrument për grumbullimin e të dhënave.

b) Përpilo instrument më të mirë për mbledhjen e të dhënave që do ta përdorte Kaltrina.

5. Drejtuesi i parkut zbavitës dëshiron të dijë çfarë mendojnë vizitorët për rekuizitat që posedon në park.

E paarshtroi këtë pyetje në hulumtimin e tij.

Çfarë mendon për rekuizitat në parkun zbavitës?

- ❑ Shkëlqyeshëm
- ❑ Shumë mirë
- ❑ Mirë
- ❑ Kënaqshëm
- ❑ Dobët

a) Gjeje një vërejtje në pjesën me përgjigjet.

b) Shëno pyetje më të mirë që do të mund ta përdorte në hulumtimin.

6. Jovana dëshiron të dijë sa shpesh tinejxherët në qytetin e saj e shfrytëzojnë pishinën lokale për not.

Shëno pyetje adekuate që do të mundeshin të përdoren si pjesë e pyetësorit.

7. Suzana hulumton masën e domateve të reja në serrën e saj.

Ajo përdor tabelën vijuese për t'i shënuar rezultatet.

Masa, m (g)	Vijëzat	Frekuenca
5 - 10		
10 - 20		
25 - 30		
30 - 50		

Gjeji dy parregullsi për tabelën.

8. Oliveri i mat lartësitë e disa bimëve në kopshtin e tij.

Lartësitë, në centimetra, janë:

23	45	43	31	50	49	12	32	59	18
16	32	37	38	61	45	37	14	26	53

Shkruaji këto lartësi në tabelën e frekuencës duke përdorur grupe adekuate.

Nëse mendon se është e nevojshme, mund të përdorësh edhe kolonë për vijëza.

9. Në një restorant nisi të punojë drejtues i ri. Ai dëshiron të dijë sa shpesh njerëzit të cilët jetojnë në afërsi kryejnë ngrënien jashtë shtëpisë dhe çfarë lloj ushqimi preferojnë të hanë.

Në grupe prej dy apo tre, diskutoni pyetjet që do të kishte mundur t'i parashtrojë.

Tento të mos parashtrosh shumë pyetje, pasi që pyetësorët e gjatë shpeshherë nuk plotësohen deri në fund.

Shkruaj disa pyetje që do të kishe mundur t'i kyçësh në pyetësor.

10. Në një qytet do të hapet qendër e re sportive.

Drejtuesi i saj dëshiron të instalojë pajisje (rekuizitë) të cilën do ta shfrytëzojnë banorët lokalë. Ai shfrytëzon pyetësor për të zbuluar çfarë dëshirojnë ata.

Do të ishte e dobishme nëse zbulon se njerëzit a janë të interesuar të merren me sport apo të shikojnë aktivitete sportive, si dhe atë cilat sporte janë më të kërkuara mes banorëve.

Në grupe prej dy apo tre persona, diskutoni cilat informata duhet t'i dijë drejtuesi i ri.

Shëno disa pyetje që do të mund t'i kyçësh në pyetësor.

11. Aleksandri hulumton sa shpesh njerëzit shkojnë në kinema.

Një prej pyetjeve të tij është: "Sa shpesh shkoni në kinema?"

a) Gjej dy parregullsi të kësaj pyetjeje.

b) Shkruaj pyetje më të mirë që do të mund ta përdorte.

12. Violeta hulumton gjatësitë e këngëve në koleksionin e saj të kompakt-disqeve.

a) Bëj instrument për grumbullimin e të dhënave që do të mund ta shfrytëzonte Violeta.

Përdor klasa adekuate.

b) Plotësoje formularin për grumbullimin e të dhënave për disa kompakt-disqe tuaja.

5.3 Diagramet trung-gjethe

Diagramet trung-gjethe i përdorim që t'i organizojmë të dhënat të renditura sipas madhësisë.

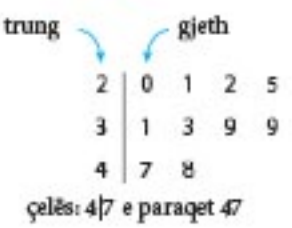
Trungu është në të majtë prej vijës vertikale.

Secili gjeth gjithnjë është i paraqitur me një shifër.

Fletët patjetër duhet të renditen sipas madhësisë në çdo resht.

Fletët i shkruajmë në shumë reshta njërën nën tjetrën, në vija vertikale.

Gjithmonë duhet të jepet çelës për interpretim të diagramit.



Shembulli 1

Rezultatet nga testi i matematikës për grupin prej 23 djelmoshave janë:

41, 10, 23, 15, 52, 30, 26, 29, 58, 42, 19, 49, 38, 37, 25, 31, 55, 42, 24, 43, 35, 34, 25

a) Vizato diagram trung-gjeth për t'i paraqitur këto të dhëna.

b) Shkruaje medianën për rezultatet nga testi.

c) Njehsoje rangun e rezultateve nga testi.

a)

1	0	5	9			
2	3	4	5	5	6	9
3	0	1	4	5	7	8
4	1	2	2	3	9	
5	2	5	8			

çelës: 5|2 e paraqet 52

b) Mediana është vlera e cila gjendet në mesin e vargut të të dhënave të renditura sipas madhësisë së tyre.

Ka 23 vlera. Vlera në mes është e dymbëdhjeta.

Mediana është 34.

c) Rangu = vlera më e madhe - vlera më e vogël = 58 - 10 = 48.

Diagramet trung-gjethe të njëpasnjëshme

Diagramet trung-gjethe të njëpasnjëshme përdoren gjatë punës me dy shpërndarje, si për shembull me popullim mashkullor dhe femëror.

Me këto diagrame është i mundur krahasim i lehtë dhe i shpejtë i shpërndarjeve.

Trungu është në mes.

Gjethet gjenden në të dy anët e trungut.

Duhet t'i emërtojmë të dy anët e diagramit.

Gjethet majtë nga trungu janë në renditje të kundërt, ashtu që më i vogli është më së afërmi trungut.

Çelësi tregon trung dhe dy gjethe.

Shembulli 2

Rezultatet nga testi i matematikës për grupin prej 23 vajzave janë:

45, 20, 37, 57, 12, 43, 53, 57, 47, 57, 44, 11, 24, 36, 44, 31, 25, 50, 42, 40, 55, 25, 28, 58, 48

a) Shtoni rezultatet për vajzat në diagramin trung-gjeth në shembullin të mësipërm që të formosh diagramin trung-gjeth të njëpasnjëshëm.

b) Cakto medianën e rezultateve të testit që kanë arritur vajzat.

c) Njehso rangun për rezultatet e testit që kanë arritur vajzat.

ç) Krahasoji rezultatet nga testi që arritën djemtë dhe vajzat.

a)

vajzat								djem						
					2	1	1	0	5	9				
			8	5	5	4	0	2	3	4	5	5	6	9
					7	6	1	3	0	1	4	5	7	8
8	7	5	4	4	3	2	0	4	1	2	2	3	9	
	8	7	7	7	5	3	0	5	2	5	8			

çelësi: 0|5|2 domethënë 50 për vajzat dhe 52 për djemtë

b) Mediana është e 43.

c) Rangu është = 58 − 11 = 47.

ç) Mesatarisht vajzat kanë rezultate më të mira se djemtë pasi që kanë medianë më të lartë.

Rezultatet e vajzave dhe djemve kanë thuajse rang të barabartë.

Nga forma e diagramit trung-gjeth shihet se rezultatet nga testi i djemve janë kryesisht në mesin e rangut të notave. Numri më i madh i rezultateve të vajzave gjendet mes 40 dhe 60. Kjo do të thotë se kanë në përgjithësi rezultate më të mira.

Detyra

1. Trung-gjeth diagrami i njëpasnjëshëm tregon numrin e pikëve të fituara nga dy lojtarët gjatë garave në basketboll në sezonin e fundit.

Ivani							Andreu						
					1	9							
		9	8	7	3	2	1	7					
8	7	6	5	4	2	0	3	2	5	6	8	8	
	8	5	4	2	1	4	0	2	4	5	5	6	8
		5	3	1	0	5	1	3	3	9			
						6	2	3					
					1	7							

çelësi: 3|2|1 domethënë Ivani kishte 23 pikë, kurse Andreu 21 pikë.

a) Sa është numri më i vogël i pikëve që ka fituar Andreu?

b) Sa është numri më i madh i pikëve që ka fituar Andreu?

c) Njehso rangun e pikëve të Andreut.

ç) Njehso rangun e pikëve të Ivanit.

d) Cakto medianën e pikëve të Andreut.

dh) Cakto medianën e pikëve të Ivanit.

e) Cili ka medianën më të madhe? Sipas medianës, çfarë mund të thuhet për numrin e tyre të pikëve?

ë) Cili ka rang më të madh? Sipas rangut, çfarë mund të thuhet për numrin e tyre të pikëve?

2. Pikët e testit të nxënësve prej dy klasave janë:

Klasa A:

71, 51, 25, 31, 38, 47, 53, 30, 34, 43, 59, 60, 35, 42, 45, 56, 63, 40, 47, 56, 64

Klasa B:

28, 46, 59, 66, 73, 19, 30, 46, 63, 64, 37, 43, 58, 62, 69, 74, 23, 34, 59, 60, 70, 41, 55, 68, 75

a) Vizato diagramin trung-gjeth të njëpasnjëshëm për t'i paraqitur rezultatet nga testi për të dy klasat.

b) Për klasën A cakto:

i medianën

ii rangun

c) Për klasën B cakto:

i medianën

ii rangun

ç) Cila klasë ka medianë më të lartë? Sipas medianës, çfarë mund të thuhet për rezultatet e testit?

d) Cila klasë ka rang më të lartë? Sipas rangut, çfarë mund të thuhet për rezultatet e testit?

3. Filipi ka shënuar numrin e automobilave të parkuara në parking çdo ditë në ora 9 paradite dhe në ora 5 pasdite gjatë 27 ditëve.

Janë fituar këto të dhëna:

Në ora 9:

05, 25, 57, 43, 30, 34, 34, 45, 53, 65,

38, 23, 76, 58, 40, 62, 18, 37, 45, 52,

16, 09, 34, 32, 50, 43, 22

Në ora 17:

09, 38, 43, 57, 54, 31, 77, 57, 68, 62,

58, 43, 57, 42, 37, 31, 30, 40, 60, 52,

58, 52, 39, 32, 30, 72, 62

a) Vizato diagramin trung-gjeth të njëpasnjëshëm për t'i paraqitur rezultatet.

b) Cakto medianën dhe rangun e numrit të automobilave në parkingun në ora 9.

c) Cakto medianën dhe rangun e numrit të automobilave në parkingun në ora 17.

ç) Krahaso numrin e automobilave të parkuara në ora 9 dhe ato të parkuara në ora 17.

4. Një fermer kryente matjen e masës në gram për dy lloje patate.

Lloji A:

36, 44, 49, 54, 57, 68, 82, 34, 45, 57, 58, 63, 74, 79, 31, 48, 53, 67, 69, 81, 30, 48, 51, 66, 71

Lloji B:

75, 76, 81, 39, 43, 56, 63, 75, 40, 49, 59, 66, 31, 47, 61, 65, 56, 59, 65, 73, 76, 80, 64, 67, 72

Duke vizatuar diagramin trung-gjeth të njëpasnjëshëm, krahaso të dy llojet e shpërndarjeve.

5.4 Statistikat për grupe të mëdha të dhënash

Mesatarja

Mesi aritmetik, gjegjësisht mesatarja, njehsohet me formulën:

$$\text{Mesatarja} = \frac{\text{shuma e të gjitha vlerave të të dhënave në grup}}{\text{numri i përgjithshëm i të dhënave në grup}}$$

Grupet e mëdha me të dhëna zakonisht i grupojmë në klasa.

Meqenëse nuk i dimë vlerat e sakta, bëjmë **vlerësim të mesatares** duke caktuar vlerën mesatare të çdo klase.

Shembulli 1

Me tabelën e dhënë të frekuencave janë paraqitur kohët e udhëtimit me autobus.

Bëj vlerësim të mesatares të kohëve të udhëtimit me autobus.

Koha, t (minuta)	Frekuenca
$5 < t \le 10$	4
$10 < t \le 15$	18
$15 < t \le 20$	32
$20 < t \le 25$	14
$25 < t \le 30$	7

Koha, t (minuta)	Frekuenca, f	Vlera mesatare e klasës, m	$f \cdot m$
$5 < t \le 10$	4	7,5	30
$10 < t \le 15$	18	12,5	225
$15 < t \le 20$	32	17,5	560
$20 < t \le 25$	14	22,5	315
$25 < t \le 30$	7	27,5	192,5
	Gjithsej 75		Gjithsej 1322,5

$$\text{Mesatarja} = \frac{\text{shuma e vlerave në kolonën } f \cdot m}{\text{shuma e frekuencave}} = \frac{1322{,}5}{75} = 17{,}6 \text{ deri në 1 v.dh.}$$

Mediana

Në grupin me numër tek të të dhënave, mediana është e dhëna në mes, kur të dhënat janë të radhitura sipas madhësisë. Në grupin me numër çift të të dhënave, mediana është mesi aritmetik i dy anëtarëve të mesëm, kur të dhënat janë të radhitura sipas madhësisë.

Te të dhënat e grupuara mund ta caktojmë grupin (ose klasën) që përmban medianën.

Shembulli 2

Bëj vlerësim të medianës për kohët e udhëtimit me autobus nga shembulli 1.

Mediana është vlera në mes.

Ajo është e tridhjeteteta (38) vlerë në tabelë.

Kur kohët janë të radhitura sipas madhësisë:

Koha, t (minuta)	Frekuenca
$5 < t \le 10$	4
$10 < t \le 15$	18
$15 < t \le 20$	32
$20 < t \le 25$	14
$25 < t \le 30$	7

4 kohët e para janë 10 minuta ose më të vogla.

22 kohët e para janë 15 minuta ose më të vogla.

54 kohët e para janë më të vogla ose barazi se 20 minuta.

Koha e 38-të është në klasën $15 < t \leq 20$.

Moda

Moda është vlerë që më shpesh paraqitet në një grup të dhënash.

Mund ta caktojmë klasën që e përmban modën, respektivisht klasën modale për të dhënat e grupuara.

Shembulli 3

Gjeje klasën modale për kohët e udhëtimit me autobus në shembulli 1.

Klasa modale është klasa me frekuencën më të madhe.

Klasa modale është $15 < t \leq 20$.

Koha, t (minuta)	Frekuenca
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Detyra

1. Me tabelat janë paraqitur të dhëna të grupuara.

Për secilën tabelë:

a) gjeje klasën modale

b) gjeje klasën që përmban medianën

c) bëj vlerësim për mesataren duke përdorur vlera mesatare të klasave.

A)

Klasa	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
Frekuenca	4	8	12	6	2

B)

Klasa	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Frekuenca	4	18	16	8	3	1

2. Tabela tregon lartësitë në centimetra të grupit të nxënësve.

a) Bëj vlerësim të mesatares të lartësive të nxënësve duke përdorur vlera mesatare të klasave.

b) Gjeje klasën që përmban medianën e lartësisë së nxënësve.

Lartësia, h (cm)	Frekuenca
$150 < h \leq 160$	14
$160 < h \leq 170$	48
$170 < h \leq 180$	60
$180 < h \leq 190$	5

3. Në tabelë janë paraqitur masat e grupit të foshnjave.

a) Bëj vlerësim të mesatares të masës së foshnjave duke përdorur vlera mesatare të klasave.

b) Gjeje klasën që përmban medianën e masës së foshnjave.

Masa, m (kg)	Frekuenca
$0 < m \leq 2$	8
$2 < m \leq 4$	40
$4 < m \leq 6$	29
$6 < m \leq 8$	2

4. Në tabelat janë paraqitur kohët për të cilat nxënësit në dy grupe zgjidhin fjalëkryqe.

Grupi A	
Koha, t (minuta)	Frekuenca
$0 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 30$	25
$30 < t \leq 40$	18
$40 < t \leq 50$	11

Grupi B	
Koha, t (minuta)	Frekuenca
$0 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 20$	10
$20 < t \leq 30$	20
$30 < t \leq 40$	12
$40 < t \leq 50$	4

a) Bëj vlerësim të mesatares së kohëve për secilin grup të nxënësve.

b) Cili grup në tërësi e zgjidh fjalëkryqin më shpejt? Përgjigjen tuaj shpjegoje.

5. Teodora thotë se vajzat kanë dorëshkrimin më të madh se sa djemtë.

Ajo luti disa nxënës të shkruajnë fjalinë: "Në një livadh ka shumë lule me ngjyra të ndryshme".

Pastaj janë matur dorëshkrimet (fjalitë).

Rezultatet janë paraqitur në tabela.

Vajza	
Gjatësia, l (cm)	Frekuenca
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	8
$18 < l \leq 20$	32
$20 < l \leq 22$	16
$22 < l \leq 24$	12

Djem	
Gjatësia, l (cm)	Frekuenca
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	9
$18 < l \leq 20$	29
$20 < l \leq 22$	14
$22 < l \leq 24$	4

A ka të drejtë Teodora? Trego si gjykove.

Përdor vlerësim të mesatareve të gjatësive të dorëshkrimeve për vajzat dhe djemtë.

6. Aliu e mat kohën t të pritjes, në minuta, të blerësve para një arke në vetëshërbim.

Rezultatet e matjeve janë paraqitur në tabelë.

Koha, t (minuta)	$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$
Frekuenca	8	18	30	20	10	8	6

Nga drejtuesi i vetëshërbimit kërkohet të punësojnë më tepër njerëz në arkat nëse mesatarja e "kohës së pritjes" është më e madhe se 3 minuta. Nëse mesatarja e kohës së pritjes është më e vogël se 3 minuta, drejtuesi i vetëshërbimit nuk ka nevojë të punësojë të tjerë.

a) Aliu thotë: "Vlera mesatare tregon se është e nevojshme të punësohen akoma njerëz". Trego si mesatarja e arsyeton pohimin e Aliut.

b) Udhëheqësi thotë: "Vlera mesatare tregon se nuk janë të nevojshme punësime". Trego si mediana e arsyeton qëndrimin e udhëheqësit.

Përzgjedhja e statistikës më adekuate për grupin e të dhënave

Me rëndësi është të dimë të caktojmë cila vlerë statistikore (statistikë) më së miri do ta prezantojë grupin e të dhënave.

Statistika e zgjedhur duhet më së miri t'i prezantojë karakteristikat e tërë grupit të të dhënave.

Në tabelën në vijim janë treguar përparësitë dhe mangësitë e tri vlerave të njohura statistikore.

Statistika	Përparësitë	Mangësitë
Moda	Gjithnjë është një nga vlerat e të dhënave. Statistika e vetme që mund ta caktojmë për të dhëna jonumerike.	Nganjëherë nuk ka modë. Mund të ekzistojnë më tepër moda.
Mesatarja	Për njehsimin e saj përdoren gjitha vlerat.	Në vlerën e tij mund të ndikojnë një numër i vogël, shumë vlera të mëdha ose të vogla. Është pak me gjasë të jetë një nga vlerat e të dhënave. Mund të jetë e nevojshme më shumë kohë për ta njehsuar.
Mediana	Te vlera e saj nuk ndikon ajo se të dhënat a janë vlera shumë të mëdha ose shumë të vogla.	Mund të jetë e nevojshme më shumë kohë për ta njehsua pasi që në fillim duhet t'i renditim të dhënat.

Shembulli 4

Disa automobila të vjetra janë në shitje.

Janë dhënë çmimet e tyre, në denarë:

90000, 105000, 104000, 90000, 92000, 201000, 95000

a) Gjeje modën, mesataren dhe medianën e çmimeve.

b) Përcakto dhe shpjego cila nga këto statistika më së miri i paraqet çmimet.

a) Moda është 90000.

Mediana është 95000.

Mesatarja është 111000.

b) Moda është çmimi më i ultë, prandaj ajo nuk i paraqet mirë të dhënat.

Mesatarja është më e lartë se të gjitha çmimet, përveç çmimit më të lartë, pra edhe kjo nuk i paraqet mirë të dhënat.

Vlera e medianës gjendet në intervalin e të dhënave të paraqitura, prandaj me medianën më së miri mund të paraqitet ky grup i të dhënave.

Shembulli 5

Jovani merr të holla ditore (xheparllëk) nga prindërit në vlerë prej 200 denarë në javë.

Ai bëri hulumtim për të zbuluar sa para ditore fitojnë fëmijët e mëhallës së tij.

Arriti të kuptoj se:

mesatarja është 270 denarë

mediana 260 denarë

moda 250 denarë

Jovani thotë: "Duhet të fitoj 70 denarë më tepër që ta arrij mesataren javore të parave ditore sikur fëmijët tjerë".

Nëna e tij thotë: "Do të jap 50 denarë më tepër që të arrish paratë javore të xhepit si shumica e fëmijëve".

a) Shpjego përse pajtohesh me Jovanin.

b) Shpjego përse pajtohesh me nënën e tij.

c) Propozo gjëra të tjera që Jovani dhe e ëma duhet t'i marrin parasysh.

a) Mesatarja është 70 denarë më e madhe se të hollat ditore që fiton Jovani.

b) Moda është 50 denarë më e madhe se të hollat ditore që fiton Jovani.

c) Ekzistojnë më tepër punë që ata duhet t'i marrin parasysh, si për shembull, a është Jovani i gatshëm të ndihmojë rreth detyrave të shtëpisë, ose a duhet Jovani të blejë lojëra kompjuterike. Duhet të merret parasysh edhe madhësia e fushës në të cilën Jovani i gjen të dhënat, si dhe numri i fëmijëve të pyetur – mostra më e vogël nuk do të japë statistika të besueshme.

Detyra

1. Me cilën statistikë më së miri do të prezantohej secila nga grupet e të dhënave:

a) Madhësia mesatare e këpucëve të nxënësve në klasën tënde.

b) Numri mesatar i fëmijëve në çdo familje të një fshati.

c) Notat në garat për vallëzim që të fitohet notë mesatare.

ç) Lartësia mesatare e nxënësve në klasën tënde.

d) Ngjyra mesatare e flokëve të njerëzve në një fshat.

2. Abdullau ka shënuar numrin e kilometrave që ka kaluar për çdo ditë me automobilin e tij.

I shënoi këto të dhëna: 12, 15, 8, 9, 14, 137, 8.

a) Gjeje modën, medianën dhe mesataren për këto distanca.

b) Me cilën nga vlerat nën a) më së miri do t'i prezantosh këto distanca? Shpjego përgjigjen tënde.



3. Në pakon me fije shkrepëse shkruan: "Mesatarisht përmban 30 fije".

Angjeli numëroi numrin e fijeve në 170 pako.

Fijet	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Frekuenca	5	3	8	12	48	32	17	20	15	5	1	4

a) Sa pako kanë 30 ose më tepër fije?

b) Sa pako kanë më pak se 30 fije?

c) Njehso modën, medianën dhe mesataren e numrit të fijeve në pakot.

ç) Shfrytëzo zgjidhjet tuaja nën c) që ta shpjegosh pohimin "mesatarisht përmban 30 fije".

4. Uroshi i shkroi kohët e nevojshme për hapje të datotekave nga interneti, në sekonda deri në sekondën më të afërt.

Moda e kohëve është 4 sekonda. Mesatarja e kohëve është 9 sekonda. Mediana e kohëve është 6 sekonda.

Përcakto cili nga këto pohime është i saktë, i pasaktë ose nuk mund asgjë të thuhet për të.

a) Numri më i madh i hapjes është 4 sekonda.

b) Shumica prej gjysmës së kohëve të hapjes janë më të vogla se 7 sekonda.

c) Ekziston numër i vogël i kohëve shumë të mëdha të hapjes së datotekave.

ç) Janë të nevojshme 5 sekonda për hapje të një datoteke. Kjo është më e gjatë se koha që është e nevojshme të hapet numri më i madh i datotekave veç e veç.

d) Janë të nevojshme 6 sekonda për hapje të një datoteke. Për saktë gjysmën e datotekave është e nevojshme kohë më e gjatë për hapje.



5. Tea kryen hulumtim me të cilin i krahason shpenzimet për përkujdesën e kafshëve të ndryshme të preferuara.

Ajo arriti të grumbullojë këto të dhëna prej 10 pronarëve të papagajve.

Shpenzim mujor në denarë

110, 100, 90, 240, 60, 160, 80, 40, 250, 320

Ajo arriti të grumbullojë këto të dhëna prej 8 pronarëve të maceve.

Shpenzimi mujor në denarë

80, 220, 180, 30, 50, 210, 40, 190

Ajo tha: "Mesatarisht, më shtrenjtë është rritësh papagall se sa mace."

A ka të drejtë Tea? Trego si ajo mori qëndrim të tillë.

Përzgjedh çfarë do të përdorësh: modë, medianë ose mesatare.

6. Në tabela janë paraqitur të dhëna për rrogat e të punësuarve në një fabrikë.

Punëtorët	
rroga, r, (në mijëshe)	Frekuenca
$10 < p \leq 20$	8
$20 < p \leq 30$	28
$30 < p \leq 40$	14
$40 < p \leq 50$	3
$50 < p \leq 60$	0

Drejtuesit	
rroga, r, (në mijëshe)	Frekuenca
$10 < p \leq 20$	0
$20 < p \leq 30$	0
$30 < p \leq 40$	5
$40 < p \leq 50$	12
$50 < p \leq 60$	8

a) Bëj vlerësim të mesatares së rrogave të punëtorëve.

b) Bëj vlerësim të mesatares së rrogave të drejtuesve.

c) Kombinoji të dhënat e dy tabelave. Njehsoje mesataren e rrogave për të gjithë të punësuarit në fabrikë.

ç) Punëtorët duan të rriten rrogat e tyre. Cilën vlerë statistike do duhej ta shfrytëzonin që të tentojnë të fitojnë rritjen më të madhe të rrogave.

d) Sipas artikullit në një gazetë, njerëzit në fabrikë janë mirë të paguar.

Cilën vlerë statistike me siguri ka përdorur gazeta, që ka ardhur në këtë përfundim?

5.5 Krahasimi i shpërndarjeve

Poligoni i frekuencës

Poligon të frekuencës shfrytëzojmë për paraqitje dhe krahasim të shpërndarjeve të frekuencës së të dhënave të kontuinuara të grupuara.

Pikat e poligonit janë vizatuar në prerjen e koordinatës në mesin e çdo klase dhe koordinatës të çdo frekuence për klasë përkatëse.

Pikat janë të lidhura midis tyre me vija të drejta.

Për boshtet e sistemit koordinativ të poligonit të frekuencës vlejnë të gjitha rregullat si te diagrami i frekuencës.

"Maja" e poligonit të frekuencës tregon ku janë të përqendruara të dhënat.

Dy shpërndarje mund të jenë treguar në sistemin e njëjtë koordinativ.

Në këtë rast patjetër duhet t'i vizatojmë poligonet me ngjyra të ndryshme dhe të japim çelës.

Kur i interpretojmë poligonet mund t'i themi pozitat e majave dhe përhapjen e shpërndarjeve.

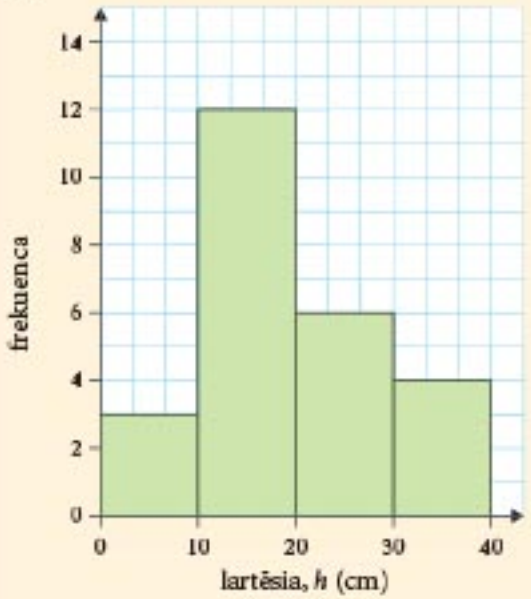
Shembulli 1

Për lartësitë h në cm, të paraqitura në tabelë, vizato:

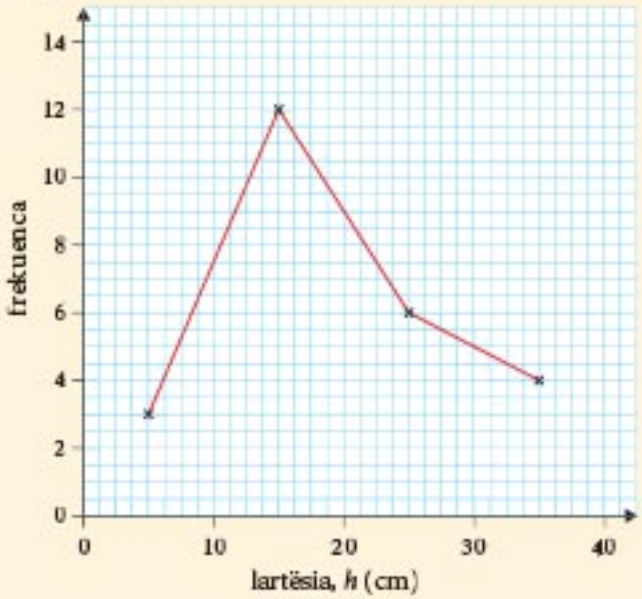
a) diagram të frekuencës **b)** poligon të frekuencës

lartësia, h (cm)	Frekuenca
$0 < h \leq 10$	3
$10 < h \leq 20$	12
$20 < h \leq 30$	6
$30 < h \leq 40$	4

a)



b)



Diagrami shtyllor

Diagrame shtyllore përdorim kur duam të paraqesim njëkohësisht dy ose më tepër grupe të dhënash. Ato i quajmë **diagrame shtyllore të shumëfishta**.

Diagramet shtyllore që paraqesin vetëm dy grupe të dhënash i quajmë **diagrame shtyllore të dyfishta**.

Diagramet shtyllore të shumëfishta mundësojnë krahasim të lehtë mes dy apo më tepër shpërndarjeve.

Kur vizatojmë diagrame shtyllore të shumëfishta, duhet të kyçim edhe çelës.

Rregullat për diagramet shtyllore të shumëfishta janë të njëjta sikur për diagrame shtyllore të thjeshta.

Shembulli 2

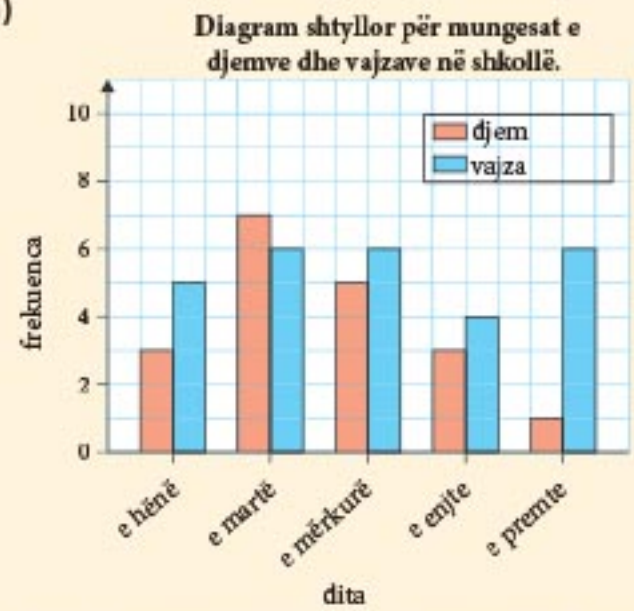
Mungesat e djemve dhe vajzave të klasës gjatë një jave janë dhënë në këtë tabelë.

	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte
Djem	3	7	5	3	1
Vajza	5	6	6	4	6

a) Paraqiti të dhënat përmes diagramit shtyllor të shumëfishtë.

b) Krahasoji mungesat e djemve dhe vajzave.

a)

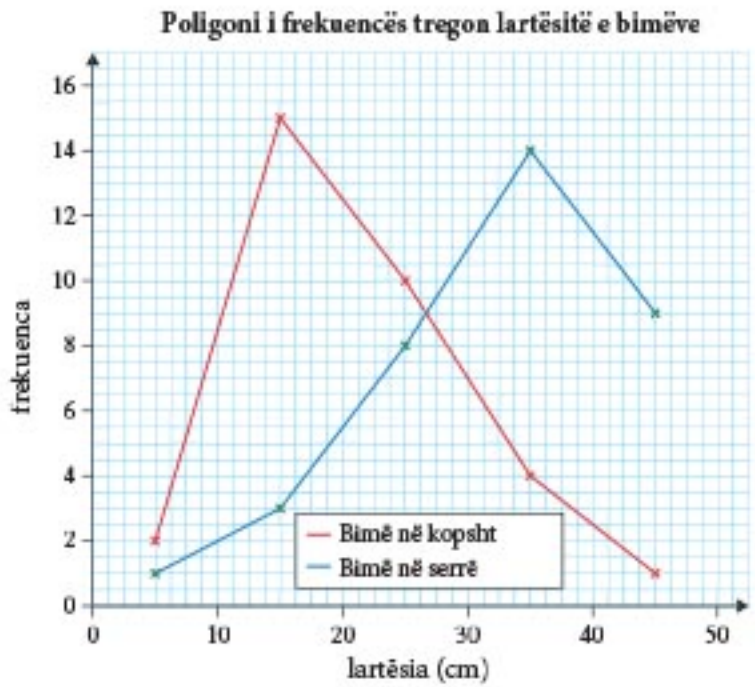


b) Vajzat mungojnë më tepër. Mungesat e djemve arrijnë maksimumin në ditën e martë dhe gradualisht zvogëlohet gjatë vijimit të javës.

Detyra

1. Elena ka mbjellë bimë në kopsht dhe në serrë.

Poligoni i frekuencës tregon lartësitë e bimëve të saja.



a) Sa bimë nga kopshti kanë lartësi ndërmjet 10 cm dhe 20 cm?

b) Sa bimë nga serra kanë lartësi ndërmjet 10 cm dhe 20 cm?

c) Sa bimë nga kopshti kanë lartësi prej 20 cm ose më të madhe?

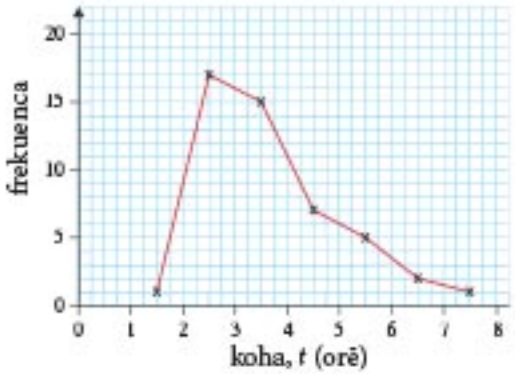
ç) Sa bimë nga serra kanë lartës prej 20 cm ose më të madhe?

d) Cilat bimë në përgjithësi rriten më të larta? Çfarë mund të përfundosh nga poligoni i frekuencave?

2. Gjatë hulumtimit të dy grupeve nxënësish, janë shënuar kohët që ata i kalojnë pranë kompjuterit gjatë një jave.

Poligoni i frekuencave tregon rezultatet e grupit A.

Poligoni i frekuencave për kohën e kaluar pranë kompjuterit për grupin A



Në tabelë janë paraqitur kohët e nxënësve të grupit B që ata kalojnë pranë kompjuterit gjatë javës së njëjtë sikur grupi A.

Koha, t (orë)	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$	$7 < t \leq 8$
Frekuenca	0	3	5	8	14	13	3

a) Vizato poligon të frekuencës për grupin B, duke shfrytëzuar me përmasë të njëjtë sikurse për grupin A.

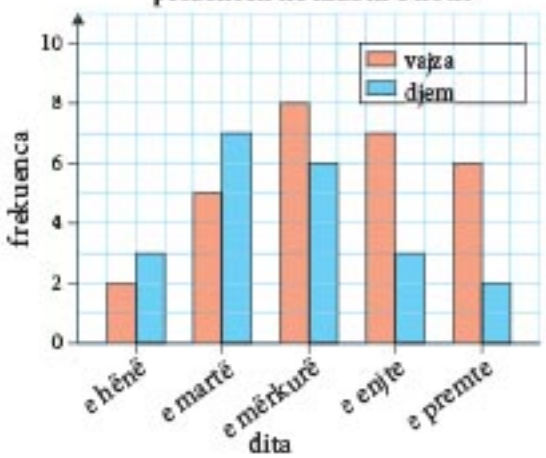
b) Sa nxënës të grupit B kanë kaluar më pak se 4 orë pranë kompjuterit?

c) Sa nxënës të grupit A kanë kaluar më pak se 4 orë pranë kompjuterit?

ç) Me ndihmën e poligoneve të frekuencës cakto cili grup në përgjithësi ka kaluar më tepër kohë pranë kompjuterit. Shpjego përgjigjen tënde.

3. Diagrami shtyllor i dyfishtë tregon prezencën e djemve dhe vajzave në klubin e notit gjatë një javë.

Diagrami shtyllor i dyfishtë për prezencën në klubin e notit



a) Sa vajza ishin të pranishme në ditën e martë?

b) Sa djem ishin të pranishëm të premten?

c) Cilën ditë më së shumti ishin të pranishme vajzat?

ç) Cilën ditë më së shumti ishin të pranishëm djemtë?

d) Cilën ditë është vërejtur prezencë më e madhe e përgjithshme?

dh) Gjatë tërë javës, sa më tepër vajza kanë prezantuar në krahasim me djemtë.

4. Në një hulumtim njerëzit ishin pyetur sa herë dhe përse udhëtojnë?

Në tabelë janë paraqitur udhëtimet e njerëzve në vit, gjatë tre viteve të njëpasnjëshme.

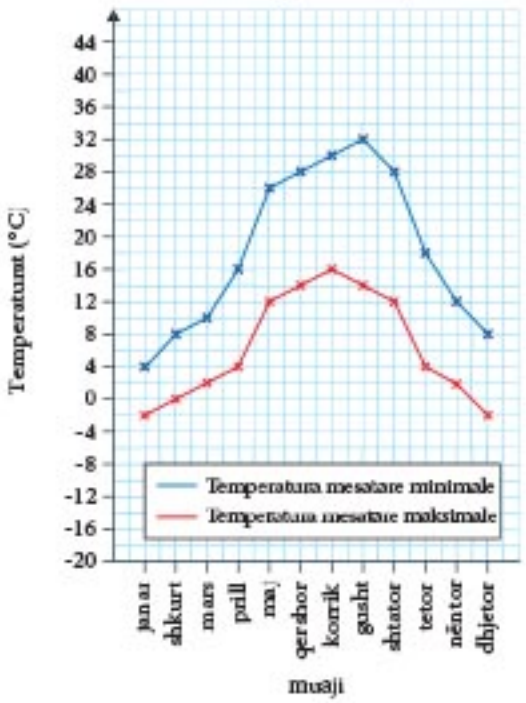
	2007	2008	2009
Blerje	186	198	193
Udhëtimi deri në punë	162	156	147
Rruga zyrtare	33	30	30

a) Vizato diagram shtyllor të shumëfishtë për t'i paraqitur të dhënat.

b) Bëj krahasimin e të dhënave nga diagrami shtyllor i shumëfishtë.

5. Në diagramin vijor janë paraqitur temperaturat e larta mesatare mujore dhe temperaturat e ulëta mesatare mujore në Maqedoni.

Diagram vijor për temperaturat e larta dhe të ulëta mesatare mujore në Maqedoni.



a) Sa është temperatura e ulët mesatare në janar?

b) Sa është temperatura e lartë mesatare në janar?

c) Sa është dallimi mes temperaturës së lartë mesatare dhe asaj të ultë mesatare në muajin janar?

ç) Në cilin muaj është vërejtur dallimi më i madh mes temperaturës së lartë mesatare dhe asaj të ulët mesatare?

d) Në cilët muaj është me gjasë që të matet kjo temperaturë.

6. Mejremi thotë: "Djemtë janë më të lartë se vajzat".

Në tabelë janë paraqitur të dhënat për disa nxënës trembëdhjetë vjeçarë.

Lartësia, h (cm)	Frekuenca e djemve	Frekuenca e vajzave
$140 < h \leq 150$	1	4
$150 < h \leq 160$	5	8
$160 < h \leq 170$	10	12
$170 < h \leq 180$	13	6
$180 < h \leq 190$	2	0

a) Vizato poligon të frekuencës për t'i paraqitur lartësitë e vajzave dhe djemve.

b) A mendon se Mejremi ka të drejtë? Shpjego përgjigjen tënde.

7. Janë testuar bateritë e dy prodhuesve.

Rezultatet janë paraqitur në tabelë.

Prodhuesi X	
Koha, t (orë)	Frekuenca
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	6
$10 < t \leq 15$	2
$15 < t \leq 20$	1

Prodhuesi Y	
koha, t (orë)	Frekuenca
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 15$	5
$15 < t \leq 20$	1

a) Vizato poligon të frekuencës për t'i paraqitur të dy kohët.

b) Teodori do të blejë një bateri. Cilin prodhues do t'ia rekomandosh? Shpjego përgjigjen tënde.

Shfrytëzoje poligonin që të vendosësh.

Detyra për përsëritje

1. Gorani gjendet në lokacionin A. Bujari gjendet në lokacionin B.

Gorani thotë: "Në lokacionin A ka lëvizje më të mëdha se sa në lokacionin B".

Ata i numëronin njerëzit të cilët kalonin përskaj tyre në periudhë prej gjysmë ore, çdo ditë gjatë 3 javëve.

Rezultatet e grumbulluara janë:

Lokacioni A:

21, 34, 37, 45, 27, 36, 47, 51, 61, 19, 28, 46, 50, 23, 42, 38, 47, 20, 39, 48, 53

Lokacioni B:

55, 37, 24, 16, 24, 33, 39, 48, 13, 28, 37, 51, 62, 10, 25, 42, 44, 21, 35, 38, 56

a) Vizato diagramin trung-gjeth të njëpasnjëshëm për t'i paraqitur të dhënat.

b) Gjeje medianën dhe rangun për lokacionin A.

c) Gjeje medianën dhe rangun për lokacionin B.

ç) A ka të drejtë Gorani? Shpjego përgjigjen tënde.

2. Agoni hulumton blerjen e biçikletave.

a) Propozo pyetje që kishte mundur ta parashtrojë.

b) Çfarë të dhënash i duhen?

c) Këto të dhëna a do të ishin primare apo sekondare?

3. Çfarë është dallimi për të dhënat mes burimeve primare dhe atyre sekondare?

4. Një kompani ka 451 të punësuar.

Drejtuesja e kompanisë dëshiron të zbulojë çfarë mendojnë të punësuarit për kantinën në kompani.

a) Thekso një arsye përse duhet të përdorë mostër.

b) Sa njerëz duhet të përmbajë mostra?

c) Cilën metodë për grumbullimin e të dhënave duhet ta shfrytëzojë ajo?

ç) A do të grumbullonte të dhëna primare apo sekondare?

d) Ajo përdor pyetësor për grumbullimin e të dhënave.

Shëno dy pyetje që do të kishte mundur t'i përdorte në pyetësorin e saj

5. Arieta hulumton sa kohë nxënësit në klasën e saj kalojnë në lexim të librave.

Një nga pyetjet që parashtroi është: "Sa kohë kalon duke lexuar libra?"

a) Përmend dy parregullsi të kësaj pyetje.

b) Shkruaj pyetje më të mirë që kishte mundur të përdoret në pyetësor.

6. Një fermer shënoi numrin e vezëve të pulave gjatë 28 ditëve:

25	31	42	12	21	31	45	31	20	17
6	15	27	38	41	52	19	26	24	18
15	16	18	27	34	36	41	50		

Paraqiti këto të dhëna në tabelë të frekuencave duke përdorur klasa përkatëse.

7. Prej grupit të arsimtarëve janë fituar të dhënat për orët e punës çdo javë.

Ato të dhëna janë paraqitur në tabelë.

a) Bëj një vlerësim për mesataren e orëve të punës duke përdorur vlera mesatare të klasave.

b) Gjeje klasën që e përmban medianën e orëve të punës.

Orët e punës, h	Frekuenca
$35 < h \leq 40$	1
$40 < h \leq 45$	4
$45 < h \leq 50$	7
$50 < h \leq 55$	15
$55 < h \leq 60$	9
$60 < h \leq 65$	8
$65 < h \leq 70$	3

8. Anëtarët e një klubi atletik e mbaruan garën.

Në tabelë janë paraqitur kohët e tyre.

Koha, t (minuta)	Frekuenca
$30 < t \leq 40$	15
$40 < t \leq 50$	17
$50 < t \leq 60$	11
$60 < t \leq 70$	7

a) Bëj vlerësimin e mesatares së kohëve.

b) Në garë morën pjesë disa vrapues të cilët nuk janë anëtarë të klubit atletik.

Mesatarja e kohëve të tyre është 49 minuta.

Krahaso kohët e anëtarëve të klubit atletik me vrapuesit të cilët nuk janë anëtarë të klubit.

9. Jordani dhe Maja i krahasonin shërbimet e dy kompanive A dhe B për transport.

Kohët e vonesës janë:

Kompania A: 5, 10, 15, 30, 5, 20, 5, 10, 5, 10

Kompania B: 0, 0 , 30, 40, 0, 10, 15, 25, 10, 0

a) Njehso mesataren, medianën dhe modën e numrit të minutave të vonesës për secilën kompani për transport.

b) Jordani thotë se kompania A është më e suksesshme. Përmend një arsye që Jordani të ketë të drejtë në konstatimin e tij.

c) Maja thotë se kompania A është më e suksesshme. Përmend një arsye që Maja të ketë të drejtë në konstatimin e saj.

10. Një kompani ka 50 të punësuar.

Tabela tregon pozicionet, numrin e të punësuarve dhe pagat mujore në denarë.

Pozicioni	Kryetar	Drejtor	Menaxher	Udhëheqës	Punëtor i kualifikuar	Punëtor i përgjithshëm	Punëtor higjienik
Numri i të punësuarve	1	2	4	8	13	18	4
Paga mujore	100000	75000	40000	30000	22000	15000	12000

a) Cakto modën, mesataren dhe medianën e të punësuarve në kompani.

b) Cila statistikë (moda, mediana apo mesatarja) më së miri i paraqet të dhënat? Shpjego përse.

11. Simona vozitet me automobil deri në punë çdo ditë.

Ajo mund të zgjedhë mes marshutës A dhe asaj B.

Në tabelë janë treguar kohët e saja nëpër të dy marshutat gjatë dy muajve rresht.

Marshuta A	
Koha, t (minuta)	Frekuenca
$5 < t \leq 10$	5
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 25$	4
$25 < t \leq 30$	3

Marshuta B	
Koha, t (minuta)	Frekuenca
$5 < t \leq 10$	0
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	21
$20 < t \leq 25$	3
$25 < t \leq 30$	0

a) Vlerëso mesataren e kohëve nëse përdoret marshuta A.

b) Vlerëso mesataren e kohëve nëse përdoret marshuta B.

c) Cila marshutë në përgjithësi është më e shpejtë?

ç) Një ditë Simona nuk ia arriti.

Ajo duhet të arrijë në punë për 25 minuta, përndryshe do të vonohet në punë.

Cilën marshutë duhet ta përzgjedhë? Shpjego përgjigjen tënde.

12. Bojana dhe Martini ndihmojnë në shtëpi që të fitojnë shpërblehen me një sasi të hollash ditore.

Bojana thotë: "Unë punoj më gjatë se Martini".

Ata i kanë shënuar kohët të kaluara në punë për secilën javë.

Koha, t (minuta)	Frekuenca e Bojanës	Frekuenca e Martinit
$30 < t \leq 60$	2	3
$60 < t \leq 90$	3	10
$90 < t \leq 120$	5	9
$120 < t \leq 150$	14	4
$150 < t \leq 180$	4	2

a) Vizato poligon të frekuencës për t'i paraqitur të dhënat.

b) A ka të drejtë Bojana? Shpjego përgjigjen tënde.

13. Temperatura në një serrë matet në çdo 30 minuta.

Në tabelë janë paraqitur këto matje gjatë një pasdite.

Koha	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30
Temperatura (°C)	23	25	27	29	30	30	31	32	31	30	29	26

a) Paraqiti të dhënat me diagram vijor.

b) Kur për të parën herë temperatura u ngrit në 30°C

c) Sa gjatë temperatura ishte 30°C ose më e lartë?

ç) Vlerëso gjatësinë e kohës për të cilën temperatura ishte më e lartë se 26°C.

6 Numri dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Vlerëson rrënjët katrore dhe kubike.
- Përdorë renditjen gjegjësisht përparësitë e operacioneve, përfshirë kllapat dhe fuqizimin.
- E dëshmon rëndësinë e përdorimit të rregullave për operacionet aritmetike dhe inverse për thjeshtim të njehsimit.
- E zgjeron diturinë prej metodave mentale për llogaritje, duke punuar me numra dhjetorë, thyesa, përqindje dhe shumëzues, duke përdorur shënime.
- Zgjidh probleme me zvogëlim ose zmadhim në përqindje, përfshirë probleme të thjeshta me financa personale ose shtëpiake, për shembull kamatë, lirim, fitim, humbje dhe tatim.
- Me logjikë zgjidh probleme tekstuale.
- Di të marrë qëndrim kur të zbatojë thyesa ose përqindje për t'i krahasuar sasitë e ndryshme.
- Në mënyrë precize identifikon, organizon, paraqet dhe interpreton informata në formë të shkruar, tabelare, grafike dhe me diagram.
- Krahason dy raporte; interpreton dhe përdor raport në kontekste të ndryshme.
- Punon me numra, shprehje algjebrike dhe barazime dhe shpesh zbaton përdorim të algoritmeve.
- Identifikon kur dy madhësi janë të drejta proporcionale; zgjidh probleme me proporcione, për shembull kalim nga një valutë në tjetër.

6.1 Rrënjët katrore dhe kubike

Rrënjët katrore

Numrat e plotë 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,... i quajmë **katrorë të plotë.** Katror i plotë është numër i fituar me shumëzim të çfarëdo numri të plotë me vetveten.

Rrënja katrore është numër katrori i të cilit është numri nën rrënjën.

Nëse njehsojmë rrënjën katrore të katrorit të plotë, atëherë do të fitojmë numrin prej të cilit është fituar katrori i plotë.

Për shembull, rrënjë katrore e numrit 36 është 6.

Kështu sepse $6^2 = 36$.

Shembulli 1

Shkruaj rrënjët katrore të:

a) 81 **b)** 169 **c)** 400 **ç)** 225

a) $9^2 = 81$, prandaj rrënjët katrore të 81 është 9

b) $13^2 = 169$, prandaj rrënja katrore e 169 është 13

c) $20^2 = 400$, prandaj rrënja katrore e 400 është 20

ç) $15^2 = 225$, prandaj rrënja katrore e 225 është 15

Duhet t'i mësosh përmendësh katrorët e plotë deri më 400.

Rrënja katrore e cilitdo numër tjetër, si për shembull, $\sqrt{20}$, nuk është numër i plotë.

Bëjmë vlerësim të vlerës së rrënjës, ashtu që i përcaktojmë të dy katrorët e plotë ndërmjet të cilëve gjendet ajo vlerë.

E shqyrtojmë vargun e katrorëve të plotë.

20

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ...

20 është më i madh se 16 dhe më i vogël se 25

$\sqrt{20}$ është më i madh se $\sqrt{16}$ dhe më i vogël se $\sqrt{25}$..

$\sqrt{20}$ është më i madh se 4 dhe më i vogël se 5.

20 është përafërsisht në mesin ndërmjet 16 dhe 25,
prandaj rrënja katrore e numrit 20 do të jetë
përafërsisht 4,5

Me kalkulator fitojmë $\sqrt{20} = 4{,}47$ i rrumbullakuar
në dy vende dhjetore, prandaj 4,5 është vlerësimi më i mirë.

Shembulli 2

Bëj vlerësim të rrënjëve katrore të numrave të dhënë:

a) 40 **b)** 55 **c)** 160

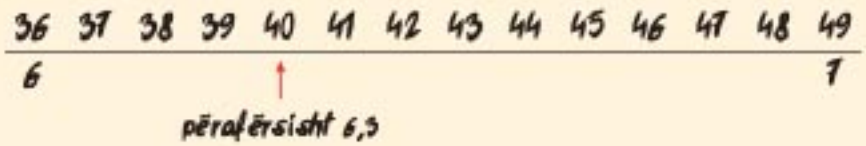
Zgjidhjet kontrolloji me kalkulator.

a) 40 është ndërmjet 36 dhe 49.

$\sqrt{40}$ është ndërmjet 6 dhe 7.

40 është më afër numrit 36 se sa numrit 49.

Të shikojmë në boshtin numerik. Rrënja katrore e numrit 40 është përafërsisht 6,3.



Me kalkulator fitojmë se $\sqrt{40} = 6{,}325$ (e rrumbullakuar në 3 vende dhjetore.)

b) 55 është ndërmjet 49 dhe 64.

$\sqrt{55}$ është ndërmjet 7 dhe 8.

55 është më afër numrit 49 se sa numrit 64.

Rrënja katrore e numrit 55 është përafërsisht 7,4.

Me kalkulator fitojmë se $\sqrt{55} = 7{,}416$ (e rrumbullakuar në 3 vende dhjetore.)

c) 160 është ndërmjet 144 dhe 169.

$\sqrt{160}$ është ndërmjet 12 dhe 13.

160 është më afër numrit 169 se sa numrit 144.

Rrënja katrore e numrit 160 është përafërsisht 12,7..

Me kalkulator fitojmë se $\sqrt{160} = 12{,}649$ e rrumbullakuar në 3 vende dhjetore.

Rrënjët kubike

Sikur te rrënja katrore metodën e njëjtë e shfrytëzojmë për vlerësim të rrënjëve kubike.

Dallimi i vetëm është që numrat negativë kanë rrënjë kubike negative.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ pasi që $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Ka numër tek të shenjave negative, prandaj rezultati është negativ.

Kubet e plota prej 1^3 deri 10^3 janë:

$\mathbf{1} = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ $\quad -\mathbf{1} = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

$\mathbf{8} = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad -\mathbf{8} = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$\mathbf{27} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad -\mathbf{27} = (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

$\mathbf{64} = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ $\quad -\mathbf{64} = (-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

$\mathbf{125} = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad -\mathbf{125} = (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

$\mathbf{216} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ $\quad -\mathbf{216} = (-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

$\mathbf{343} = 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad -\mathbf{343} = (-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$

$\mathbf{512} = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8$ $\quad -\mathbf{512} = (-8)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

$\mathbf{729} = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$ $\quad -\mathbf{729} = (-9)^3 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$

$\mathbf{1000} = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ $\quad -\mathbf{1000} = (-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$

Duhet t'i mësosh përmendësh kubet e para: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 dhe 10^3.

Shembulli 3

Vlerësoni numrat e dhënë:

a) $\sqrt[3]{20}$ **b)** $\sqrt[3]{-140}$ **c)** $\sqrt[3]{750}$

a) 20 është ndërmjet numrave 8 dhe 27.

$\sqrt[3]{20}$ është ndërmjet numrave 2 dhe 3.

20 është më afër numrit 27 se sa numrit 8.

$\sqrt[3]{20}$ është përafërsisht 2,7

b) -140 është ndërmjet numrave -125 dhe -216.

$\sqrt[3]{-140}$ është ndërmjet numrave -5 dhe -6.

-140 është më afër numrit -125 se sa numrit -216.

$\sqrt[3]{-140}$ është përafërsisht $-5{,}2$

c) 750 është ndërmjet numrave 729 dhe 1000.

$\sqrt[3]{750}$ është ndërmjet numrave 9 dhe 10.

750 është më afër numrit 729 se sa numrit 1000.

$\sqrt[3]{750}$ është përafërsisht 9,1.

Detyra

1. Përshkruaj dhe kryej vlerësim për $\sqrt{70}$, kurse pastaj plotëso ashtu që pohimet e dhëna të jenë të sakta.

70 është ndërmjet 64 dhe....

$\sqrt{70}$ është ndërmjet ..... dhe .....

10 është më afër te ..... se sa te .....

$\sqrt{70}$ është përafërsisht i barabartë me .....

2. Njehso rrënjët katrore në vijim. Zgjidhjet kontrolloji me kalkulator.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{15}$ **c)** $\sqrt{45}$ **ç)** $\sqrt{90}$ **d)** $\sqrt{300}$

dh) $\sqrt{200}$ **e)** $\sqrt{380}$ **ë)** $\sqrt{265}$ **f)** $\sqrt{180}$ **g)** $\sqrt{125}$

3. **a)** Njehso vlerat e 21^2 dhe 22^2.

b) Shfrytëzoje zgjidhjen nën **a)** që të vlerësosh sa është $\sqrt{450}$.

c) Kontrolloji zgjidhjet tuaja me kalkulator.

4. Shkruaji të gjitha kubet e plota ndërmjet numrave 1 dhe 1000.

5. Shfrytëzoje zgjidhjen e detyrës 4 që t'i vlerësosh rrënjët kubike në vijim.

Provoni zgjidhjet me kalkulator.

a) $\sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[3]{30}$ **c)** $\sqrt[3]{90}$ **ç)** $\sqrt[3]{200}$ **d)** $\sqrt[3]{-50}$

dh) $\sqrt[3]{-500}$ **e)** $\sqrt[3]{950}$ **ë)** $\sqrt[3]{-120}$ **f)** $\sqrt[3]{-10}$ **g)** $\sqrt[3]{350}$

6. Është dhënë skema numerike me numra katrorë.

$1^2 - 0^2 = 1 + 0 = 1$

$2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$

$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$

$4^2 - 3^2 = \_\_ + \_\_ = 7$

$5^2 - 4^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

$6^2 - 5^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

a) Përshkruaje skemën dhe plotësoji vendet e zbrazëta.

b) Plotëso dy rreshtat vijues të skemës.

c) Njehso: I $10^2 - 9^2$ II $16^2 - 15^2$

Përdore të njëjtën rregull të skemës.

7. Marku dhe Matej bisedojnë për detyrën e shtëpisë.

Marku thotë se $\sqrt{-100} = -10$ pasi që $\sqrt{100} = 10$

Matej thotë se $\sqrt{-100}$ nuk mund të njehsohet meqenëse numrat negativë nuk kanë rrënjë katrore.

Cili ka të drejtë?

Përpiqu të njehsosh $(-10)^2$. Çfarë ndodh nëse shumëzon dy numra negativë?

6.2 Rendi i operacioneve

Rendi sipas të cilit kryhen operacionet në një shprehje është shumë me rëndësi.

Në klasën VIII mësuam për rendin e kryerjes së operacioneve:

Kllapat

Fuqitë

Pjesëtimi
Shumëzimi

Mbledhja
Zbritja

Operacionet janë shënuar sipas rendit të kryerjes. Fillimisht kryhen operacionet në kllapa. Pastaj kryhet fuqizimi.

Pjesëtimi dhe shumëzimi janë operacione të rendit të njëjtë dhe mund të kryhen njëkohësisht.

Mbledhja dhe zbritja po ashtu janë operacione të rendit të njëjtë dhe këto i kryejmë më në fund.

Shembulli 1

Njehso: $24 + 4^2 \cdot (9 - 7) - 27 : 3$

$24 + 4^2 \cdot (9 - 7) - 27 : 3$ — Në fillim njehsojmë në kllapa

$= 24 + 4^2 \cdot 2 - 27 : 3$ — Pastaj i njehsojmë fuqitë

$= 24 + 16 \cdot 2 - 27 : 3$ — Pastaj pjesëtimin dhe shumëzimin

$= 24 + 32 - 9$ — Në fund, mbledhjen dhe zbritjen

$= 47$

Shembulli 2

Përdor kllapat që të jetë i saktë barazimi i dhënë:

$21 - 12 : 6 - 2^2 = 23$

Vendosim kllapa në disa vende të ndryshme.

a) Pa kllapa

$21 - 12 : 6 - 2^2$

$= 21 - 12 : 6 - 4$

$= 21 - 2 - 4 = 15$ — Kjo nuk është e saktë

b) $(21 - 12) : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 4$

$= 1\frac{1}{2} - 4 = -2\frac{1}{2}$ — Kjo nuk është e saktë

c) $21 - 12 : (6 - 2^2)$

$= 21 - 12 : 2$

$= 21 - 6 = 15$ — Kjo nuk është e saktë

ç) $21 - (12 : 6 - 2^2)$

$= 21 - (12 : 6 - 4)$

$= 21 - (2 - 4)$

$= 21 - (-2) = 23$ — Kjo është e saktë

Vetëm në rastin e fundit kllapat janë përdorur mirë.

Detyra

Njehso:

1. $17 - 5 \cdot 3$ **2.** $32 : 8 + 3^2$ **3.** $69 - 52 \cdot 2$

4. $7 + 3 \cdot 4$ **5.** $3 \cdot 5 + 6 \cdot 2$ **6.** $9 \cdot 4 - 20 : 5$

7. $6 \cdot (3 + 2)$ **8.** $12 : (8 - 4)$ **9.** $9 \cdot (2 + 3) \cdot 10$

10. $3^2 - 2^2 \cdot 2$ **11.** $(3^2 - 2^2) \cdot 2$ **12.** $60 : 2^2 - 8$

13. $36 - 5^2 + 2 \cdot 3$ **14.** $3 \cdot (4^2 - 3^2)$ **15.** $(5 + 2 \cdot 4)^2$

16. $2^3 + 3^3 \cdot 2$ **17.** $17 + 3^2 \cdot (6 - 2)$ **18.** $12^2 - (2 + 7 \cdot 4)$

19. $36 - 3^3 : (12 - 9) - 2^3$ **20.** $(1 + 2)^3 + 4 \cdot 5 - 6$

Përdor kllapa, atje ku janë të domosdoshme, ashtu që barazimet të jenë të sakta.

21. $12 + 3 \cdot 2 = 30$ **22.** $5 \cdot 8 - 3 = 25$ **23.** $32 : 8 - 4 = 8$

24. $36 : 3 + 6 \cdot 2 = 8$ **25.** $5^2 - 7 \cdot 2 = 36$ **26.** $9 - 7 \cdot 3^2 = 18$

27. $2^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 = 90$ **28.** $6 + 2 \cdot 5^2 = 56$

29. Marku shkroi një barazim, por i harroi kllapat.

$$5 + 12 \cdot 3 - 1 = 2 + 3 \cdot 6 - 1$$

Për të qenë barazimin i saktë, vendos kllapa në dy anët e barazimit.

Duhet të vendosësh kllapa në më tepër vende të ndryshme para se ta gjesh shënimin e saktë të barazimit.

6.3 Zmadhimi dhe zvogëlimi në përqindje

Kompanitë, si dhe disa persona fizik paguajnë tatime.

Njerëzit paguajnë tatim për paratë që i fitojnë dhe për paratë që i harxhojnë.

Tatimi shprehet me përqindje, prandaj përpjesëtimi i njëjtë paguhet për shumat e përgjithshme të ndryshme.



Që të zmadhojmë një madhësi fillestare për përqindje të caktuar, gjejmë përqindjen nga ajo madhësi dhe numrin e fituar ia shtojmë madhësisë fillestare.

Që të zvogëlojmë një madhësi fillestare për përqindje të caktuar, gjejmë përqindjen nga ajo madhësi dhe numrin e fituar ia zbresim madhësisë fillestare.

Shembulli 1

Numri i banorëve në një fshat është 250.

Pritet vitin e ardhshëm që ai të rritet për 5%.

Njehso sa do të jetë numri i pritur i banorëve vitin e ardhshëm në fshat.

$\frac{5}{100} \cdot 260 = 13$ Kjo është rritja.

$260 + 13 = 273$ Ia shtojmë rritjen.

Numri i pritur i banorëve është 273.

Shembulli 2

Një biçikletë shitet për 12500 denarë.

Çmimi i saj është zvogëluar për 15%.

Caktoje çmimin e ri të biçikletës?

$\frac{15}{100} \cdot 12500 = 1875$ Ky është zvogëlimi.

$12500 - 1875 = 10625$ E zbresim zvogëlimin.

Biçikleta pas zvogëlimit kushton 10625 denarë.

Zbatimi i përqindjeve

Kur një shitore blen produkt dhe pastaj e shet më shtrenjtë se sa ka paguar për të, dallimin në çmim e quajmë **fitim** (**profit**). Kur një shitore shet produkt për çmim më të lirë se sa çmimi me të cilin është furnizuar, atëherë dallimi i tillë quhet **humbje**.

Kur kemi para në bankë, për to banka na paguan kamatë. Kamata zakonisht paguhet në fund të vitit. Për shembull, norma e interesit prej 5% çdo vit shpesh shkruhet si 5% **vjetor**. Nëse kamata nuk i shtohet llogarisë, atëherë bëhet fjalë për **kamatë të thjeshtë**.

Çmimet shpesh paraqiten me tatim të kyçur, nganjëherë janë dhënë edhe pa tatim.

Normat e tatimit janë të ndryshme, varësisht nga ajo çfarë shitet dhe në cilin shtet bëhet shitja.

Shembulli 3

Marija shet gurabija në shitoren e saj.

Përpunimi i një gurabije kushton 30 denarë.

Ajo do të realizojë fitim prej 80%.

Sa do të jetë çmimi i një gurabije?

$\frac{80}{100} \cdot 30$ denarë $= 24$ denarë

30 denarë $+ 24$ denarë $= 54$ denarë

Ky është fitimi që dëshiron ta realizojë, 80% nga çmimi i kostos.

Pra, duhet ta shesë secilën gurabi për 54 denarë.

Shembulli 4

Nikolla ka një kursim prej 5000 denarë në bankë.

Fiton kamatë të thjeshtë prej 6% vjetore për kursimin e tij.

Çfarë kamate duhet të fitojë Nikolla nëse paratë e tij qëndrojnë në bankë dy vjet?

$\frac{6}{100} \cdot 5000 = 300$ denarë — Kjo është kamata që fiton për çdo vit

300 denarë · 2 = 600 denarë

Kamata totale është 600 denarë.

Përcaktimi i përqindjes

Nganjëherë duhet të caktojmë numër që është thyesë ose përqindje e një numri tjetër.

Që ta caktojmë, fillimisht e shënojmë numrin e kërkuar si thyesë, kurse pastaj e shndërrojmë atë thyesë në përqindje.

Kur njehsojmë zmadhim apo zvogëlim të ndonjë vlere, ne në fakt e krahasojmë ndryshimin me vlerën origjinale.

Shembulli 5

Tina bleu biçikletë për 7500 denarë.

Më vonë e shiti për 6500 denarë.

Njehso në përqindje humbjen.

Zgjidhjen shkruaje duke e rrumbullakuar në një vend dhjetor.

7500 − 6500 = 1000 denarë — Kjo është humbja kur e shet biçikletën.

$\frac{1000}{7500} \cdot 100 = 13{,}(3)\% = 13{,}3\%$ (në 1 v.dh.) — Kjo është humbja si përqindje nga çmimi origjinal

Humbja e Tinës është 13,3% (në 1 v.dh.).

Shembulli 6

Sofia mori pjesë në disa teste nga matematika.

Fitoi 25 pikë nga 30 pikët e mundshme në testin për thyesa.

Fitoi 34 pikë nga 40 pikët e mundshme në testin për gjasa.

Fitoi 48 pikë nga 60 pikët e mundshme në testin për vargjet.

Në cilin test Sofia ka arritur sukses më të mirë?

Në cilin test Sofia ka arritur sukses më të dobët?

Testet kanë vlera të ndryshme, prandaj është e nevojshme t'i gjejmë përqindjet dhe pastaj t'i krahasojmë.

Testi për thyesat: $\frac{25}{30} \cdot 100 = 83{,}3\%$ (në 1 v.dh.)

Testi për gjasë: $\frac{34}{40} \cdot 100 = 85\%$

Testi për vargjet: $\frac{48}{60} \cdot 100 = 80\%$

Sofia ka arritur rezultatin më lart në testin për gjasë. Rezultat më të dobët ka arritur në testin për vargjet.

Detyra

1. Një agjenci turistike i zmadhoi të gjitha çmimet për 15%.

Njehso çmimet e reja për biletat që para shtrenjtimit ishin:

a) 1200 denarë **b)** 2400 denarë **c)** 3600 denarë

2. Në një shitore ka zbritje prej 25% te të gjitha çmimet.

Gjeji çmimet e reja (me zbritje) për:

a) televizor, çmimi origjinal i të cilit ishte 28000 denarë

b) kartela e memories, çmimi origjinal i së cilës ishte 1400 denarë

c) fotoaparat, çmimi origjinal i të cilit ishte 6000 denarë

3. Banka paguan 3% kamatë të thjeshtë vjetore për gjitha depozitat në euro.

Njehso kamatën që do t'i paguhet në fund të vitit personave:

a) Marija, e cila ka pasur depozitë bankare prej 250 euro.

b) Liljana, e cila ka pasur depozitë bankare prej 320 euro.

c) Kosta, i cili ka pasur depozitë bankare prej 280 euro.

4. Një thes çimento shitet për 386 denarë plus tatim.

Tatimi është 18%.

Sa duhet të paguhet për një thes çimento?

5. Në vizatim është paraqitur meny restoranti.

Restoranti merr 10% parapagim (shtesë) për shërbimet e të gjitha çmimeve.

Njehso sa kushton secili lloj i picës, duke kyçur në çmim edhe shtesën për shërbime.



6. Aleksandri ka 36000 denarë.

Ai harxhoi 3000 denarë për këpucë dhe 2400 denarë për këmishë.

Çfarë përqindje të parave harxhoi ai?

7. Aliu shet limonadë nëpër shishe me vëllim 1 litër.

Shpenzimet për prodhim të 1 litër limonadë janë 60 denarë.

Ai e shet limonadën nga 75 denarë për litër.

a) Sa është fitimi i tij në përqindje?

b) Ka shitur 20 litra limonadë. Sa është fitimi i përgjithshëm i tij?

8. Në tabelë janë paraqitur sipërfaqja e përgjithshme dhe sipërfaqja ujore e 5 shteteve.

Shteti	Sipërfaqja e përgjithshme (km^2)	Sipërfaqja ujore (km^2)
Australia	7741220	58920
Kanadaja	9984670	891163
Belgjika	30528	250
Uruguai	176215	1200
Gana	238533	11000

Gjeje përqindjen e sipërfaqes ujore të secilit shtet në tabelë.

Zgjidhjet e fituara rrumbullakoj në dy vende dhjetore.

9. Elena bleu kuzhinë që kushtoi 24000 denarë.

Ajo pagoi 35% të çmimit të përgjithshëm, kurse mbetjen duhet ta paguajë në 24 këste të barabarta mujore.

Sa denarë është kësti mujor i saj?

Fillimisht zbrite shumën që ka paguar.

10. Në tabelë janë paraqitur të dhënat për numrin e nxënësve dhe nxënëseve në programin për arsimim plotësues në Mbretërinë e Bashkuar ndërmjet viteve 1970 dhe 2008.

Nxënës (në mijëshe)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
116	154	219	520

Nxënëse (në mijëshe)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
95	196	261	534

a) Njehso ndryshimet në përqindje nga viti 1970/71 gjerë në vitin 1980/81 për:

i nxënës **ii** nxënëse.

b) Njehso ndryshimet në përqindje nga viti 1990/91 gjerë në vitin 2007/08 për:

i nxënës **ii** nxënëse.

c) Njehso përqindjen e nxënësve në secilin vit, të paraqitur në tabelën.

ç) Çfarë mund të thuhet për ndryshimet e përqindjeve nën **c)**?

Krahasoje ndryshimin me vlerën origjinale.

Përqindjet mbi 100 dhe nën 100

Nganjëherë duhet t'i caktojmë vlerën e madhësisë së madhësive përpara se të njehsojmë ndërrimin (ndryshimin) në përqindje.

Me kujdes duhet ta lexojmë detyrën që të zbulojmë se vlera e madhësisë në detyrë a është dhënë përpara ose pas ndryshimit të përqindjes.

Që të njehsojmë vlerën para ndryshimit:

- e njehsojmë përqindjen e përgjithshme
- pjesëtojmë që të gjejmë 1%
- pastaj shumëzojmë me 100 që ta gjejmë vlerën para njehsimit të përqindjes.

Shembulli 7

Andreu duhej të paguajë llogarinë prej 528 denarë në restorant.

Në llogari është përfshirë edhe 10% parapagimi për shërbime.

Sa është vlera që duhej ta paguante Andreu përpara se të shtohet llogarisë parapagimi për shërbime?

Llogaria origjinale është 100%.

10% + 100% = 110% Ky është çmimi origjinal plus parapagimi i shërbimeve.

528 denarë janë 110%.

$1\% = \frac{528}{110} = 4{,}8$ denarë Pjesëtojmë me 110 që ta gjejmë vlerën e 1%.

100% = 100 · 4,8 denarë = 480 denarë

Llogaria ka qenë 480 denarë.

Shembulli 8

Çmimi i një biçiklete është zvogëluar për 15% gjatë një lirimi.

Tani shitet për 5950 denarë.

Sa ka qenë çmimi origjinal i saj?

Çmimi origjinal është 100%.

100% − 15% = 85%

5950 denarë është 85%. Ky është çmimi origjinal i zvogëluar për lirimin

$1\% = \frac{5950}{85} = 70$ denarë Pjesëtojmë me 85 që ta gjejmë vlerën e 1%.

100% = 100 · 70 denarë = 7000 denarë Shumëzojmë me 100 që ta gjejmë vlerën e 100%.

Çmimi origjinal ka qenë 7000 denarë.

Detyra

1. Shporeti shitet me çmim, të zvogëluar për 25%.
   Çmimi i zvogëluar është 3150 denarë.
   Sa ka qenë çmimi origjinal i shporetit?
2. Ena për gatim shitet me lirim.
   Në fletën e ngjitur për enë shkruan "20% lirim".
   Kemi kursyer nga ky lirim 49 denarë.
   Sa ka qenë çmimi origjinal i enës?
3. Në vitin 2011 muzeun e vizituan 14400 njerëz.
   Kjo paraqet rritje prej 20% në krahasim me vitin e kaluar 2010.
   Sa njerëz e kanë vizituar muzeun në vitin 2010?
4. Shiten pallto me lirim për 960 denarë.
   Çmimi origjinal është zvogëluar për 40%.
   Njehsoje çmimin origjinal.
5. Marku fitoi 300 denarë kamatë për depozitën e tij bankare në fund të vitit.
   Norma e interesit është 6%.
   Para se të paguhet kamata, prej saj zbriten 20% për tatim.

   Njehso në fillim kamatën para zbritjes së tatimit.

Trego se depozita e tij bankare ishte 6250 denarë.

6. Çmimi i një karrige është zvogëluar për 30%.

Zvogëlimi është 450 denarë.

Sa është çmimi i zvogëluar i saj?

6.4 Krahasimi i raporteve

Raportin e përdorim për krahasim të një madhësie me tjetër. Ky krahasim njihet edhe si **herës**.

Tanimë mësuam si njehsohen raporte kur duhet të caktojmë madhësi të pjesëve.

Topa të kuq dhe të bardhë të përzier në raport 3 : 7 domethënë 3 pjesë topa të kuq dhe 7 pjesë topa të bardhë.

Ka gjithsej dhjetë pjesë.

$\frac{3}{10}$ prej topave janë të kuq, kurse $\frac{7}{10}$ janë të bardhë.

Përmes tre shembujve në vazhdim do të shqyrtojmë raporte të më tepër madhësive.

Shembulli 1

Ndaji 2352 denarë në raport 3 : 4 : 1

$3 + 4 + 1 = 8$ — I mbledhim numrat në raport që të gjejmë numrin e përgjithshëm të pjesëve të vogla.

$2352 : 8 = 294$ — Pjesëtojmë që të gjejmë madhësinë e një pjese të vogël.

$294 \cdot 3 = 882$ — Shumëzojmë që të gjejmë madhësinë e secilës pjesë.

$294 \cdot 4 = 1176$

$294 \cdot 1 = 294$

Ato tri pjesë janë: 882 denarë, 1176 denarë dhe 294 denarë.

Kontrollojmë a është rezultati i saktë duke mbledhur tri pjesët e fituara.

$882 + 1176 + 294 = 2352$ ✓

Shembulli 2

Raporti i djemve ndaj vajzave në ekskursionin shkollor është 3 : 2.

Në ekskursion kishte 46 vajza.

Sa djem kishte në ekskursion?

Shuma e raporteve është 5, pra ka pasur gjithsej 5 pjesë.

2 pjesë janë vajza.

2 pjesë = 46 — Fillojmë prej asaj që e njohim.

1 pjesë = 46 : 2 = 23 — Pjesëtojmë që të gjejmë sa është vetëm një pjesë.

3 pjesë = 23 · 3 = 69 — Shumëzojmë për të gjetur numrin e kërkuar të djemve.

Në ekskursion kishte 69 djem.

Shembulli 3

Në një kuti ka topa të kuq dhe të kaltër në raport 4 : 5.

Cila pjesë e topave janë të kuq? Shëno si thyesë.

4 + 5 = 9 — I mbledhim raportet që ta fitojmë numrin e potë të pjesëve.

4 pjesë prej gjithsej 9 pjesë janë topa me ngjyrë të kuqe.

$\frac{4}{9}$ prej topave janë të kuq.

Detyra

1. Thjeshto raportet e dhëna deri në formën më të thjeshtë të tyre.

a) 15 : 25 **b)** 36 : 54 **c)** 81 : 45 **ç)** 56 : 48 **d)** 80 : 32

2. Thjeshtëso raportet e dhëna. Zgjidhjet të jenë shkruar në formën më të thjeshtë.

a) 400 g : 1,2 kg **b)** 1,5 m : 40 cm

c) 2 ditë : 8 orë **ç)** 600 ml : 2,4 l

d) 25 mm : 4 cm **dh)** 450 m : 1 km

Shndërroji të dy anët e raportit në njësi të njëjta matëse.

3. Shkruaj raportet e dhëna në formën e tyre më të thjeshtë.

a) 36 : 45 : 27 **b)** 12 : 24 : 18 **c)** 0,5 : 1,5 : 2 **ç)** 150 : 240 : 570

4. Amvisja ka tre thasë me miell.



Thesi A ka masën 500 g, thesi B ka masën 750 g dhe thesi C ka masën 1,5 kg.

Njehso raportin e masave të thesit A ndaj thesit B ndaj thesit C.

Zgjidhjen e fituar thjeshtoje.

5. Ndaji madhësitë e dhëna në raport të kërkuar.

a) 400 denarë në raport 4 : 1 **b)** 120 cm në raport 3 : 2 **c)** 38,7 denarë në raport 5 : 4

ç) 350 denarë në raport 3 : 2 **d)** 576 km në raport 3 : 5 **dh)** 660 m në raport 10 : 1

6. Hristina, Iva dhe Beti ndanë mes tyre 1050 denarë në raport 3 : 2 : 1.

Njehso sa denarë ka fituar secila prej tyre.

7. Këndet në një trekëndësh janë në raport 5 : 4 : 3.

Njehsoje madhësinë e këndit më të vogël në shkallë.

8. Këndet në një katërkëndësh janë në raport 2 : 3 : 3 : 7.

Njehsoje madhësinë e këndit më të madh në shkallë.

9. Raporti mes të rriturve dhe fëmijëve në një autobus është 1 : 9.

Çfarë thyesë e njerëzve në autobus janë fëmijë?

10. $\frac{5}{8}$ e fëmijëve në shkollë janë femra.

Njehso raportin e femrave ndaj meshkujve.

11. Një copë shirit është prerë në raport 5 : 3.

Pjesa më e shkurtë është e gjatë 45 cm.

Sa është e gjatë pjesa më e madhe?

12. Në kuti gjenden topa të zinj dhe të bardhë në raport 7 : 4.

Në atë kuti gjenden 42 topa të zinj.

Njehsoje numrin e tërë topave që gjenden në kuti.

13. Vitet e Anës dhe Mimit janë në raport 3 : 5.

Mimi është 6 vite më e vjetër se Ana.

a) Njehso nga sa vite ka secila prej tyre.

b) Cili do të jetë raporti i viteve të tyre pas një viti? Zgjidhjen thjeshtësoje.

Të dyja do të jenë një vit më të vjetra se sa në zgjidhjen nën **a)**.

14. Në një shportë ka topa të kuq, të gjelbër dhe të kaltër.

Numri i topave të gjelbër dhe të kaltër është i barabartë.

Gjasa të nxirret rastësisht top i kuq nga shporta është $\frac{3}{7}$

Njehso raportin, topa të kuq : topa të gjelbër : topa të kaltër.

Njehso gjasën të nxirret një top i kaltër dhe gjasën të nxirret një top i gjelbër. Këto dy gjasa duhet të jenë të barabarta.

15. Në hartë është shënuar raporti 1 : 25000.

a) Rruga në hartë është e gjatë 6,4 cm. Njehso gjatësinë e vërtetë të rrugës në kilometra.

Fillimisht njehso gjatësinë në centimetra.

b) Gjatësia e pistës së aeroportit është 2,5 km. Sa është e gjatë pista në hartë?

Në fillim shndërroji kilometrat në centimetra.

c) Një plantazh në formë drejtkëndëshe ka dimensionet 3 cm dhe 1,6 cm në hartë. Njehsoje syprinën e plantazhit në hektar.

1 hektar (ha) = 10 000 m²

Raportet ekuivalente

Shpesh ndodh nevoja që t'i krahasojmë raportet.

Që të tregojmë se raportet janë ekuivalente, me thjeshtim i sjellim në formën më të thjeshtë të tyre.

Tani pasi që janë sjellë në formën më të thjeshtë dhe nëse raportet janë të barabarta, atëherë ato raporte janë **raporte ekuivalente**.

Shembulli 4

Krahaso raportet 35 : 84 dhe 60 : 144 dhe kontrollo a janë ekuivalente.

Duke kryer thjeshtimet te secila prej tyre, fitojmë:

35 : 84 = 5 : 12 I pjesëtojmë të dy numrat me 7.

60 : 144 = 30 : 72 I pjesëtojmë të dy numrat me 2.

= 5 : 12 I pjesëtojmë të dy numrat me 6.

Këtë thjeshtim mundemi ta bëjmë me një hap të vetëm, nëse pjesëtojmë me 12.

Dy raportet e dhëna janë ekuivalente, meqenëse janë të barabarta me raportin 5 : 12.

Raportet njësi

Nëse raportet janë të ndryshme, format më të thjeshta të tyre nuk janë gjithnjë të lehta për t'i krahasuar.

Në rastet e tilla përdorim dy mënyra.

Metoda e parë është duke e shndërruar në **raport njësi.**

Raport njësi është raporti i formës 1 : n ose n : 1.

Deri tani gjatë thjeshtimit të raporteve u përdorën numra të plotë.

Te raportet njësi shpeshherë vlera e n nuk është numër i plotë.

Shembulli 5

Shkolla A ka 565 nxënës dhe 27 arsimtarë.

Shkolla B ka 840 nxënës dhe 37 arsimtarë.

Cila shkollë ka raport më të vogël, nxënës ndaj arsimtar?

Raporti nxënës ndaj arsimtarë në shkollën A është 565 : 27.

Ky raport nuk mund të thjeshtohet pasi numrat 565 dhe 27 nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Zbërthimet e këtyre numrave në pjesëtues të thjeshtë janë $565 = 113 \cdot 5$ dhe $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$. Pra nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Raporti nxënës ndaj arsimtar në shkollën B është 840 : 37.

Ky raport nuk mund të thjeshtohet pasi numrat 840 dhe 37 nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Zbërthimet e këtyre numrave në pjesëtues të thjeshtë janë $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, kurse 37 është numër i thjeshtë. Pra nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Raportet nuk janë ekuivalente pasi format më të thjeshta të tyre janë të ndryshme.

Të dy raportet do t'i shndërrojmë në raporte njësi.

Shkolla A: $565 : 27 = \frac{565}{27} : 1$ I pjesëtojmë të dy anët me 27.

$= \mathbf{20{,}9 : 1}$ Në një vend dhjetor.

Shkolla B: $840 : 37 = \frac{840}{37} : 1$ I pjesëtojmë të dy anët me 37.

$= \mathbf{22{,}7 : 1}$ Në një vend dhjetor.

Në shkollën A ka 20,9 nxënës për arsimtar, kurse në shkollën B ka 22,7 nxënës për arsimtar.

Shkolla A ka raport më të vogël, nxënës ndaj arsimtar.

Zbatimi i përqindjes

Mënyra e dytë për krahasim të raporteve është që raportet t'i shndërrojmë në përqindje.

Kjo është e dobishme kur duhet ta caktojmë një madhësi si përqindje prej tjetrës.

Për ta zbatuar këtë mënyrë, madhësitë i shkruajmë si thyesa dhe thyesat i shndërrojmë në përqindje.

Shembulli 6

Ivo përzihu 240 ml ngjyrë të kuqe me 560 ml ngjyrë të bardhë.

Elena përzihu 0,75 l ngjyrë të kuqe me 1,25 l ngjyrë të bardhë.

Cila përzierje e ngjyrave ka përqindje më të madhe të ngjyrës së kuqe?

Përzierja e Ivos ka 240 ml ngjyrë të kuqe nga gjithsej 800 ml.

Kjo paraqet $\frac{240}{800}$ si thyesë.

$\frac{240}{800} = 240 : 800 = 0{,}3$

$0{,}3 = 0{,}3 \cdot 100\% = \mathbf{30\%}$

Thyesën e shndërrojmë në numër dhjetor, dhe pastaj numrin dhjetor e shndërrojmë në përqindje.

Përzierja e Elenës ka 0,75 1 ngjyrë të kuqe nga gjithsej 2 1.

Kjo paraqet $\frac{0{,}75}{2}$ si thyesë.

$\frac{0{,}75}{2} = 0{,}75 : 2 = 0{,}375$

$0{,}375 = 0{,}375 \cdot 100\% = \mathbf{37{,}5\%}$

Përzierja e Elenës ka përqindje më të madhe të ngjyrës së kuqe.

Detyra

1. Thjeshto çiftet e raporteve dhe konstato a janë raporte ekuivalente.

a) 15 : 25 dhe 12 : 18 **b)** 36 : 16 dhe 45 : 20 **c)** 25 : 40 dhe 35 : 55

ç) 21 : 56 dhe 18 : 48 **d)** 20 : 30 dhe 32 : 48 **dh)** 48 : 60 dhe 28 : 35

2. Shkruaji raportet vijuese në formën $1 : n$.

a) 4 : 7 **b)** 5 : 8 **c)** 6 : 3

ç) 8 : 10 **d)** 10 : 8

3. Në ekskursionet shkollore raporti nxënës dhe arsimtarë duhet të jetë më i vogël se 9 : 1.

Në një ekskursion njëditor kishte 128 nxënës dhe 15 arsimtarë.

a) Njehso raportin nxënës ndaj arsimtarëve për këtë ekskursion në formën n : 1.

b) A ka arsimtarë të mjaftueshëm në këtë ekskursion?

4. Denisi përzihu 28 kg dhe me 7 kg pleh.

Gorani përzihu 63 kg dhe me 17 kg pleh.

a) Njehso përqindjen e plehut në secilën përzierje.

b) Përzierja e cilit ka përqindje më të madhe të plehut?

5. Dy kopshtarët formuan përzierje të farave të barit për lëndinat e tyre.

Dragani përzihu 5 kg bar me 2 kg bar euroaziatik që përdoret si ushqim për kafshë.

Vasko përzihu 3,6 kg bar me 17 kg barë euroaziatik.

a) Njehso përqindjen e barit euroaziatik në secilën përzierje.

b) Përzierja e cilit kopshtar ka përqindje më të madhe të barit euroaziatik?

6. Aleksandri dhe Marku e përzien pijen për ahengun.

Aleksandri përzihu 1,8 litra lëng pemësh me 12 litra ujë.

Marku përzihu 2,5 litra lëng pemësh me 17,5 litra ujë.

Njehso përqindjen e lëngut të pemëve në secilën përzierje.

Së pari njehso se cilën pjesë do ta fitonte me secilën metodë. Pastaj krahasoje me shfrytëzimin e numrave dhjetorë ose përqindjeve.

7. Marijana ka 10 vjet, kurse Andrea ka 7 vjet.

Gjyshja e tyre ka përgatitur një sasi të hollash për ata.

Ajo propozon dy mënyra të ndarjes së parave.

Mënyra e parë është t'i ndajë sipas raportit të viteve të tyre.

Mënyra e dytë është t'i ndajë sipas numrit të shkronjave në emrat e tyre.

Çka mendon, cila mënyrë është më përkatëse për Marianën? Shpjego përse.

8. Janë dhënë katër raporte:

21 : 35 : 14 36 : 60: 24 27 : 45 : 15 45 : 75 : 30

Tre nga këto katër raporte janë ekuivalente, kurse një është ndryshe nga tjerat.

Thjeshto secilin raport.

Njehso cilat raporte janë ekuivalente, dhe cili dallohet nga të tjerat.

Paraqite tërë procedurën.

6.5 Përpjesëtimi (proporcioni)



Shikuar nga aspekti historik, shtetet kanë zhvilluar valuta të tyre, respektivisht sisteme të tyre monetare.

Disa valuta, sikur dollari amerikan ($), euro (€) ose funta britanike (£), janë valuta mirë të njohura në mbarë botën dhe kanë simbolet e tyre përkatëse.

Numri më i madh i shteteve kanë banka ose këmbimore në të cilat kryhen shkëmbimet e valutave prej njërës në tjetër. Ky këmbim është bazuar në faktin se valutat janë në përpjesëtim të drejtë mes tyre.

Bankat dhe këmbimoret shpesh i takojmë nëpër limane, aeroporte dhe në stacionet kryesore hekurudhore, ku njerëzit kryesisht arrijnë në shtet.

Proporcioni i drejtë

Nëse raporti (herësi) i dy madhësive gjithnjë është i njëjtë, për ato madhësi themi se janë madhësi **të drejta proporcionale.**

Për shembull, nëse automobili shfrytëzon naftë me shpenzim konstant, rruga që do të kalojë ai automobil është në proporcion të drejtë me sasinë e karburantit të shpenzuar. Kur kalojmë rrugë katër herë më të gjatë, do të shpenzojmë katër herë më tepër karburant.

Për zgjidhjen e numrit më të madh të detyrave që përfshijnë madhësi të drejta proporcionale, mund të përdorim shumëzim ose pjesëtim.

Për zgjidhjen e detyrave të tilla shfrytëzuam grafikët.

Nganjëherë është më mirë ta përdorim raportin e të dy madhësive.

Shembulli 1

Angjeli voziti 144 km dhe shpenzoi 9 litra karburant.

Njehso sa karburant i nevojitet për 400 km.

Metoda njësi: pjesëtojmë për të gjetur sasinë që shpenzohet për 1 km, dhe pastaj shumëzojmë për ta gjetur zgjidhjen.

Për 144 km shpenzohen 9 litra karburant.

Për 1 km shpenzohen $\frac{9}{144}$ litra karburant.

Për 400 km do të shpenzohen $\frac{9}{144} \cdot 400$

$$= \frac{9 \cdot 400}{144}$$
$$= \frac{3600}{144}$$
$$= 25$$

Angelit i nevojiten 25 litra karburant.

Shembulli 2

Në vizatim janë paraqitur dy paketime me drithëra.



A është sasia e arrave në secilin paketim në proporcion të drejtë me masën e përgjithshme të paketimit?

Raporti i arrave dhe masës së përgjithshme të paketimit është:

Paketim standard	45 : 300 = 3 : 20	Pjesëto me 15 për të thjeshtuar raportin.
Paketim special	66 : 440 = 3 : 20	Pjesëto me 22 për të thjeshtuar raportin.

Të dy paketimet kanë raport të njëjtë të masës së arrave ndaj masës së përgjithshme të paketimit.

Masa e arrave është në proporcion të drejtë me masën e përgjithshme të paketimit.

Shembulli 3

Tea fiton 624 denarë për punën tetorëshe.

Lindita fiton 390 denarë për punën pesorëshe.

Njehso se ato vallë janë në mënyrë të barabartë të paguara për një orë pune.

Për secilën prej tyre fitimi është në proporcion të drejtë me numrin e orëve të punës.

Vlera për një orë pune është:

Tea	624 : 8 = 78	Tea fiton 78 denarë në orë.
Lindita	390 : 5 = 78	Lindita fiton 78 denarë në orë.

Domethënë të dyja janë njësoj të paguara për një orë pune.

Normat e këmbimit

Fjalën "normë" e përdorim për ta përshkruar proporcionin ndërmjet njësive të ndryshme matëse.

Lloj i përgjithshëm i normës është kursi devizor.

Shumat e parave në dy valuta të ndryshme janë madhësi të drejta proporcionale.

Shembulli 4

Ana këmbeu 120$ në euro dhe fitoi 91,20€.

a) Njehso kursin devizor për këmbim të dollarit në euro.

Njëkohësisht, Kosta këmbeu 250$ në euro.

b) Njehso sa euro fiton ai.

a) Kursi devizor është vlera e fituar për 1 dollar.

$120\$ = 91{,}20€$

$1\$ = 91{,}20€ : 120$

$= 0{,}76€$

Kursi devizor është $1\$ = 0{,}76€$

b) E përdorim kursin devizor nën **a)**:

$250 \cdot 0{,}76 = 190$

Kosta ka fituar 190€.

Detyra

1. 7 metra shtof kushtojnë 1729 denarë.

Njehso sa duhet të paguhet për 12 metra shtof sipas çmimit të njëjtë.

2. 3 kilogram miell kushtojnë 102 denarë.

Njehso sa kushtojnë 5 kilogram miell sipas çmimit të njëjtë.

3. Deani fitoi 935 denarë për $5\frac{1}{2}$ orë pune.

Sa do të fitojë nëse punon 8 orë?

4. 55 litra naftë kushtojnë 5280 denarë.

Sa do të kushtojnë 68 litra naftë?

5. x dhe y janë dy ndryshore.

Kur $x = 12$, $y = 40$

Kur $x = 30$, $y = 100$

Vallë x dhe y janë madhësi të drejta proporcionale? Shpjego përgjigjen.

6. Duhet të krahasojmë dy kavanoza me xhem prej dredhëze.



Kavanozi i vogël ka 225 g dredhëza në 500 g xhem.

Kavanozi i madh ka 324 g dredhëza në 720 g xhem.

Masa e dredhëzave a është në proporcion të drejtë me masën e përgjithshme të xhemit?

Shpjego përgjigjen.

7. Tabela tregon sasitë e sheqerit në pakot me paketime të ndryshme drithërash.

	Paketimi A	Paketimi B	Paketimi C	Paketimi Ç
Masa e sheqerit	75 g	150 g	100 g	54 g
Masa e drithërave	500 g	1 kg	700 g	360 g

a) Njehso përqindjen e sheqerit në secilin paketim drithërash.

b) Masa e sheqerit a është në proporcion të drejtë me masën e drithërave?

Nëse madhësitë janë të drejta proporcionale, atëherë përqindjet do të jenë të barabarta.

8. Antonia fitoi 1440 denarë për punën 8-orëshe.

Stefi fitoi 1936 denarë për punën 11-orëshe.

a) Njehso sa është paguar secila prej tyre për 1 orë pune.

b) A janë njësoj të paguara për punën prej 1 ore?

9. Kursi devizor mes euros dhe denarit është 1€ = 61,69 denarë.

a) Shndërro (konverto) 120€ në denarë.

b) Shndërro 200 denarë në euro.

Rrumbullakoji zgjidhjet deri në denarin ose centin më të afërt.

10. Andreu jeton në Kavadar dhe dëshiron t'i vizitojë familjarët në Kanada në pushim.

Ai shkëmbeu 37700 denarë në dollarë kanadez në fillim të pushimit.

Kursi për këmbim mes dollarit kanadez dhe denarit është
1 dollar kanadez (CAD) = 41,97 denarë.

a) Sa dollarë kanadez ka fituar Andreu?

Në fund të pushimit, i mbetën 65 dollarë kanadez.

I shndërroji në denarë sipas kursit të njëjtë.

b) Njehso sa denarë ka fituar, rrumbullako në denarin më të afërt.

11. Jovani dhe Elena përgatiten për udhëtim në ShBA.

Jovani këmbeu 24205 denarë në 435$.

Elena këmbeu 30385 denarë në dollarë sipas kursit të njëjtë devizor, të rrumbullakuar në 2 vende decimale.

Njehso sa dollarë ka fituar Elena. Rrumbullako në 2 vende decimale.

12. Në fillimin e pushimit në Detin e Zi në Bullgari, Stojani këmbeu 500€ në 980 leva bullgare.

Në fund të pushimit i ngelën 100 leva.

Ai levat e ngelur i shndërroji në euro sipas kursit të njëjtë devizor.

Njehso sa euro fitoi, të rrumbullakuar në numër të plotë më të afërt.

Shfrytëzoji shumat e mëparshme për njehsim të shkallës së konversionit të eurove në leva.

13. Në shpallje në internet një kompjuter shitet për 240£ ose për 375$.

Kursi devizor është 1$ = 0,61£.

Njehso se kompjuteri a është më i lirë në dollarë apo në funta.
Rrumbullako në 2 vende dhjetore.

Mund të shndërrosh në dollarë ose në funta.

14. Dejani planifikoi të shkojë në udhëtim turistik në Londër.

Ai këmbeu në bankë 76320 denarë në funta sipas kursit devizor 1£ = 79,50 denarë.

Një javë para udhëtimit pranoi propozimin e agjencisë turistike që në vend të Londrës të shkojë në Paris me çmim shumë më të volitshëm.

Ai i këmbeu funtat me euro sipas kursit devizor 1£ = 1,19€.

a) Njehso sa euro ka tani ai.
Rrumbullako në dy vende dhjetore.

Në fillim i këmbejm në funta. Pastaj ato funta në euro.

b) Kursi devizor është
1€ = 61,69 denarë.

Njehso sa euro do të kishte Dejani nëse do t'i shndërronte denarët drejtpërdrejt në euro.
Rrumbullako në dy vende dhjetore.

Zbatimi i proporcionit të drejtë në shndërrimin e njësive matëse imperiale

Miljet dhe kilometrat

Lidhja midis miljes dhe kilometrit është:

8 kilometra = 5 milje

Që të shndërrojmë kilometra në milje, pjesëtojmë me 8 dhe shumëzojmë me 5.

Që të shndërrojmë milje në kilometra, pjesëtojmë me 5 dhe shumëzojmë me 8.

Shembulli 5

Automobili i Petrit mund të kalojë rreth 70 milje para se ta shpenzojë tërë karburantin.

Petri e vërejti shenjën në autostradë për karburant.

A do të ketë sukses që të arrijë deri te pompa e benzinës para se t'i shpenzohet karburanti?



Mënyra 1: Miljet i shndërrojmë në kilometra, ashtu që pjesëtojmë me 5, e pastaj shumëzojmë me 8.

$70 : 5 = 14$

$14 \cdot 8 = 112$

Me siguri do të mbetet pa karburant, pas 112 kilometrave.

Ngase pompa e benzinës është largë 120 kilometra, me siguri nuk do të mund të arrijë deri te pompa e benzinës.

Mënyra 2: Kilometrat i shndërrojmë në milje, ashtu që pjesëtojmë me 8, e pastaj shumëzojmë me 5.

$120 : 8 = 15$

$15 \cdot 5 = 75$

Pompa e benzinës është larg 75 milje.

Petri ka benzinë edhe për 70 milje, prandaj me siguri nuk do të mund të arrijë deri te pompa e benzinës.

Njësi të tjera matëse imperiale

Ekzistojnë njësi matëse imeriale për gjatësi, masë dhe vëllim, si dhe për shumë madhësi të tjera.

Për të gjitha njësitë matëse, përveç për milje dhe kilometra, koeficienti i shndërrimit do të jepet në detyrë.

Shembulli 6

Filipi ka automobil me rezervuar që nxë 9 galonë me karburant.

Sa është vëllimi i këtij rezervuari për karburant në litra?

1 galon është rreth 4,5 litra.

Domethënë, 1 galon = 4,5 litra

9 galonë = $4,5 \cdot 9$ litra = 40,5 litra.

Rezervuari i tij për karburant nxë rreth 40,5 litra.

Shembulli 7

Mila e di se garazhi i saj është i gjatë 5,2 metra.

Ajo e ka parë këtë reklamë për shkallë.



a) Njehsoje gjatësinë e garazhit të saj në këmbë(shputa).

b) Zbulo se ajo a mund ta vendosë shkallën në garazh.

1 këmbë është rreth 0,305 metra

a) 0,305 metra = 1 këmbë

1 metër = $1 : 0,305 = 3,279$ këmbë

$5,2$ metra = $3,279 \cdot 5,2 = 17,05$ këmbë

Garazhi i saj është i gjatë pak më tepër se 17 këmbë.

Kjo është metoda unitare për proporcionalitet. Se pari gjejmë sa shputa ka ne 1 metër.

b) Shkalla është e gjatë 16 këmbë.

Ajo është më e shkurtë se 17 këmbë.

Shkalla do të mundet të vendoset ne garazhin e saj.

Detyra

1. Jovani shkoi në pushim.

Gjatë pesë ditëve ka ecur 21 milje, 18 milje, 17 milje, $15\frac{1}{2}$ milje dhe 13 milje.

a) Njehsoje numrin e përgjithshëm në milje që i ka ecur.

b) Shndërroje largësinë në kilometra.

2. Mateu gjeti një bulon të vjetër të gjatë 6 inç në bodrumin e vjetër.



Shndërroje gjatësinë e bulonit në centimetra.

1 inç është rreth 2,54 centimetra.

3. Një rezervuar për karburant nxë 150 litra.

Sa galonë është ai?

1 galon është rreth 4,5 litra.



4. Maria ka enë pesëlitërshe të mbushur me lëng molle.

Duhet ta derdhë në gota, prej të cilave çdonjëra nxë $\frac{1}{2}$ pinta.

Njehso sa gota mund të mbushen me lëng nga ena.

1 litër është rreth 1,75 pinta.

5. Nikolla ka masën trupore prej 198 funta.

Njehsoje masën e tij në kilogramë.

1 kilogram është rreth 2,2 funta.

6. Gara për maratonën e olimpiadës së pari ka qenë e gjatë 26 milje dhe 385 jardë.

Njehsoje gjatësinë në kilometra.

Ka 1760 jardë në një milje.

385 jardë janë $\frac{385}{1760}$ milje.

Shndërroje thyesën në numër dhjetor para se të njehsosh sa kilometra janë ato.

7. Todori ka masë trupore prej 93,6 kilogramë.

Nikolla ka masë trupore prej 15 gurë dhe 5 funta.

a) 1 kilogram është afërsisht 2,2 funta.

Shfrytëzoje këtë që ta shndërrosh masën e Teodorit në funta.

Shumëzo me 2,2 që të shndërrosh kilogramë në funta.

b) Ka 14 funta në 1 gur.

Shfrytëzoje këtë që ta shndërrosh masën e Nikollës në funta.

c) Shkruaj cili prej të dyve ka masë më të madhe trupore dhe për sa. Zgjidhjen rrethoje në funtën më të afërt.

Detyra për përsëritje

1. Caktoje vlerën e:

a) $\sqrt{361}$ **b)** $\sqrt{121}$ **c)** $\sqrt[3]{64}$ **ç)** $\sqrt[3]{27}$

2. Bëj vlerësimin e vlerës së:

a) $\sqrt{28}$ **b)** $\sqrt[3]{40}$ **c)** $\sqrt{300}$ **ç)** $\sqrt[3]{85}$

3. Njehsoje vlerën e shprehjeve:

a) $5 + 4 \cdot 8$ **b)** $43 - 5 \cdot 6 + 2$ **c)** $12 \cdot (3 + 2)$

ç) $100 : 5^2 + 7$ **d)** $3^3 + (12 - 2 \cdot 4)$ **dh)** $(-3)^2 + 2^2 \cdot 5^2$

e) $12 + 2^3 : 4 - 3$ **ë)** $6^2 + 4 \cdot (5 + 2^2)$

4. Përdor kllapa që të jenë të sakta barazimet.

a) $3^2 \cdot 4 + 1 = 45$ **b)** $144 : 8 + 2^2 \cdot 2 = 24$ **c)** $3 + 2 \cdot 5^2 - 9 = 80$

5. Elizabeta pagoi llogarinë për benzinë prej 3200 denarë plus edhe 6% tatim.

Sa ka paguar gjithsej?

6. Një tavolinë shitet me çmim, të zvogëluar për 12,5%.

Çmimi origjinal i saj është 3600 denarë.

Sa është çmimi i zvogëluar i tavolinës?

7. Dimitri fitoi 300 denarë kamatë nga kursimi i tij.

Ai kishte deponuar në bankë kursimin prej 4800 denarë.

Sa është kamata në përqindje?

8. Numri i personave të cilët ishin në kinema gjatë vitit 2012 ishte 25000.

Në vitin 2013 ai numër u rrit deri në 27000.

Sa është përqindja e rritjes?

9. Në tabelë janë paraqitur rezultatet e Martinit në disa teste shkollore

Lënda	Pikët	Gjithsej pikët e testit
matematikë	25	40
histori	21	30
gjeografi	48	60
biologji	52	80

Te cila lëndë Martini arriti rezultate më të mira? Shpjego si arrite te përfundimi.

10. Çmimi i një testature është zvogëluar për 40%.

Çmimi i ri i saj është 570 denarë.

Sa ka qenë çmimi i saj para lirimit?

11. Biletat për tren u zmadhuan për 25%.

Tani bileta për tren kushton 360 denarë.

Sa ka qenë çmimi i biletës para shtrenjtimit?

12. Thjeshto raportet e dhëna deri në formën më të thjeshtë.

a) 12 : 21 **b)** 24 : 56 **c)** 72 : 27

ç) 21 : 33 : 15 **d)** 48 : 28 : 36

13. Thjeshto raportet e dhëna deri në formën më të thjeshtë.

a) 4 ditë : 2 javë **b)** 1,5 kg : 500 g

c) 750 ml : 2 l **ç)** 8 mm : 2 cm

14. Ndaji madhësitë e dhëna sipas raportit të dhënë.

a) 320 € në raport 5 : 3 **b)** 160 cm në raport 7 : 1 **c)** 176$ në raport 8 : 3

15. Këndet në një katërkëndësh janë në raport 3 : 4 : 6 : 7

Njehsoje madhësinë e këndit më të madh.

16. Dërrasa e gjatë 2,4 m është prerë në dy pjesë në raport 3 : 2.

Njehso gjatësitë e të dy pjesëve.

Zgjidhjen paraqite në centimetra.

17. Në kuti gjenden topa të kuq dhe të zinj në raport 5 : 2.

Cila pjesë e topave janë të kuq? Shkruaje si thyesë.

18. Në një autobus $\frac{3}{4}$ e njerëzve janë burra.

Njehso raportin mes burrave dhe grave.

19. Ana dhe Gorani ndajnë një shpërblim në raport 5 : 2.

Ana mori 3690 denarë më tepër se Gorani.

Sa ka qenë vlera e përgjithshme e shpërblimit?

20. Thjeshto raportet e dhëna dhe gjyko a janë ekuivalente.

a) 28 : 35 dhe 36 : 45 **b)** 54 : 36 dhe 72 : 36 **c)** 63 : 27 dhe 28 : 12

21. **a)** Raportet e dhëna shënoji në formën n : 1. Nëse është e domosdoshme, rrumbullako zgjidhjet në një vend dhjetor.

i 12 : 8 **ii** 5 : 3 **iii** 5 : 4 **iv** 9 : 6 **v** 8 : 3

b) Cilat dy raporte nga **a)** janë ekuivalente?

22. Bojani ka përzier 375 ml lëng pjeshke me 3 l ujë.

Ana ka përzier 600 ml lëng pjeshke me 5 l ujë.

a) Njehso përqindjen e lëngut të pjeshkës në secilën përzierje.

b) Në cilën përzierje ka përqindje më të madhe të lëngut të pjeshkës?

23. Në një ekskursion malor shkuan 51 nxënës dhe 4 arsimtarë.

Në ekskursionin detar shkuan 87 nxënës dhe 7 arsimtarë.

a) Njehso raportin nxënës ndaj arsimtarë për ekskursionin në mal në formën n : 1.

b) Njehso raportin nxënës ndaj arsimtarëve për ekskursionin në det në formën n : 1.

c) Cili ekskursion ka raport më të madh nxënës ndaj arsimtarëve?

24. 8 metra të një materiali kushtojnë 392 denarë.

Njehsoje çmimin për 15 metra të këtij materiali.

25. Natasha dhe Mirjana në vendin e punës paguhen njësoj për 1 orë pune.

Natasha ka fituar 532 denarë për punën 7-orëshe.

Njehso sa do të fitojë Mirjana për punën 5-orëshe.

26. x dhe y janë dy madhësi të panjohura.

Kur $x = 45$, $y = 12$

Kur $x = 30$, $y = 8$

Vallë x dhe y janë madhësi të drejta proporcionale? Shpjego përgjigjen.

27. Kursi devizor mes dollarit amerikan dhe ($) dhe funtës britanike (£) është 1$ = 0,70£.

a) Shndërro 300$ në funta.

b) Shndërro 300£ në dollarë. Zgjidhjen rrumbullakoje në dy vende decimale.

28. Jane, Dame dhe Nenadi udhëtojnë nga Shkupi në Beograd.

Ata këmbyen denarë të Maqedonisë me dinarë të Serbisë sipas të njëjtit kurs devizor.

Jane këmbeu 5000 denarë në 9750 dinarë.

a) Dame këmbeu 6000 denarë në dinarë.

Njehso sa dinar ka fituar Dame.

b) Nenadi këmbeu sasi të caktuar të denarëve dhe për to fitoi 7800 dinarë.

Sa denarë Nenadi ka shndërruar në dinarë?

29. Largësia prej Shkupit deri në Kërçovë është 118 km.

Largësia prej Shkupit deri në Pehçevë është 76,8 milje.

a) Shndërroje largësinë prej Shkupit deri në Pehçevë në kilometra. Zgjidhjen rrumbullakoje në numrin më të afërt të plotë.

b) Cili qytet është më afër nga Shkupi, Pehçeva ose Kërçova? Për sa?

30. Indeksi i masës trupore (BMI) është masë për trashësinë e trupit të njeriut.

Formula për indeksin e masës trupore është:

$\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$, ku m është masa në kilogramë, kurse h është lartësia në metra.

a) Merita është e lartë 1,48 m dhe ka masë 50 kg.

Njehsoje indeksin e masës trupore të saj. Zgjidhjen rrumbullakoje në një vend dhjetor.

b) Maria është e lartë 6 këmbë dhe ka masë prej 200 funta.

I Shndërroje lartësinë e saj në metra (1 këmbë = 30 centimetra)

II Shndërroje masën e saj në kilogramë (1 kilogram = 2,2 funta)

III Njehsoje indeksin e masës trupore të saj. Zgjidhjen rrumbullakoje në një vend dhjetor.

7 Algjebra dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Zëvendëson numra pozitivë dhe negativë në shprehjet dhe formulat.
- Shpreh ndryshore përmes ndryshoreve tjera në barazim të dhënë; nxjerr formula të thjeshta; përdor formula nga matematika dhe lëndë të tjera.
- Përpilon tabelën e vlerave dhe vizaton grafikun e funksioneve lineare, ku y është në mënyrë implicite e dhënë në lidhje me x; sjell barazimin në formën $y = mx + c$; din domethënien e vlerës m dhe gjenë pjerrtësinë te grafiku drejtvizor.
- Në mënyrë precize identifikon, organizon, prezanton dhe interpreton informata në formë të shkruar, tabelare, grafike dhe me diagram.
- Përpilon funksione që dalin nga probleme të përditshmërisë, vizaton dhe interpreton grafikët e tyre.
- Vizaton diagrame precize matematikore dhe grafike.
- Përdor metoda algjebrike për zgjidhje të problemeve në lidhje me proporcionin e drejtë, i ndërlidh zgjidhjet me grafikët e barazimeve.
- Gjen zgjidhje të përafërta të sistemit të barazimit linear përmes gjetjes të pikëprerjes së grafikëve të tyre.
- Zgjidh sistem të thjeshtë prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura me eliminim të njërës ndryshore.
- Shqyrton dhe vlerëson efikasitetin e strategjive dhe qasjeve të ndryshme dhe e përmirëson procedurën e zgjidhjes.
- Përcakton prodhimin e dy shprehjeve lineare të formës $x \pm n$ dhe thjeshton rezultatin e shprehjes së fituar katrore.
- Përdor metoda sistematike të kontrollimit për t'i gjetur zgjidhjet e përafërta të barazimeve siç është $x^2 + 2x = 20$.
- Rrumbullakon numra dhjetorë deri në numër të caktuar të dhjetoreve; rrumbullakimin e përdor për të arritur në zgjidhjen e problemit me shkallë të caktuar saktësie.
- I kupton dhe përdor shenjat për jobarazim ($<, >, \leq, \geq$); përpilon dhe zgjidh jobarazime lineare me një të panjohur; paraqet zgjidhjen në drejtëzën numerike.

7.1 Nxjerrja e formulave dhe zëvendësimi i numrave në formula

Energjia dhe masa

Është e njohur formula që përdoret në shkencë $E = mc^2$

Formula tregon se ekziston shndërrim i energjisë E në masë m, me ndihmën e konstantës c^2, ku c është shpejtësia e dritës.

Shkencëtari Albert Ajnshtajn e zbuloi këtë relacion në fillim të shekullit XX.

Në këtë temë do të shfrytëzojmë formula të ndryshme që kanë zbatim në matematikë dhe në shkencë.



Të rikujtohemi si bëjmë **zëvendësimin** e vlerave në **formulë** dhe si nxjerrim formula.

Shembulli 1

$P = \dfrac{4h^2 + 5f}{2h}$

a) Njehsoje vlerën e P, nëse $f = 2$ dhe $h = -5$.

b) Njehsoje vlerën e f, nëse $P = 8$ dhe $h = 3$.

a) $P = \dfrac{4h^2 + 5f}{2h}$ — Shkronjat i zëvendësojmë me numrat e dhënë.

$= \dfrac{4 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot 2}{2 \cdot (-5)}$ — $4 \cdot (-5)^2 = 4 \cdot (-5) \cdot (-5) = 4 \cdot 25 = 100$

$= \dfrac{100 + 10}{-10}$

$= \dfrac{110}{-10}$ — Dimë se $+ : - = -$

$= -11$

b) $P = \dfrac{4h^2 + 5f}{2h}$ — Shkronjat i zëvendësojmë me numrat e dhënë.

$8 = \dfrac{4 \cdot (3)^2 + 5f}{2 \cdot 3}$ — $4 \cdot (3)^2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9 = 36$

$8 = \dfrac{36 + 5f}{6}$ — E zgjidhim barazimin.

$48 = 36 + 5f$ — Të dy anët i shumëzojmë me 6.

$12 = 5f$ — Zbresim 36 në të dy anët.

$f = 2{,}4$ — Të dy anët i pjesëtojmë me 5.

Shembulli 2

Një çokollatë ka masën 23 gramë, kurse një ëmbëlsirë ka masën 18 gramë.

Në tavolinë ka x çokollata dhe $(x - 2)$ ëmbëlsira.

Shkruaje formulën për masën e përgjithshme T, në njësinë matëse gram të çokollatave dhe ëmbëlsirave.

Masa e x çokollatave = $23x$

Masa e $(x - 2)$ ëmbëlsirave = $18(x - 2)$

$T = 23x + 18(x - 2)$ Lirohemi prej kllapave.

$T = 23x + 18x - 36$ I grupojmë anëtarët e ngjashëm.

$T = 41x - 36$

Detyra

1. Njehsoje vlerën e y në secilën prej formulave, nëse:

I $x = 10$ II $x = -5$ III $x = -10$

a) $y = 5x - 12$ **b)** $y = \frac{x}{5} + 7$ **c)** $y = \frac{5x - 1}{2}$ **ç)** $y = 50 - 4x$

d) $y = 2x - x^2$ **dh)** $y = 5x^2 - 1$ **e)** $y = x^2 + 5x + 4$ **ë)** $y = 3x^2 - 5x - 2$

2. Njehsoje vlerën e p në secilën prej formulave, nëse:

I $a = 2, b = 5$ II $a = 7, b = -3$ III $a = -1, b = -4$

a) $p = 2ab$ **b)** $p = 5 - ab$ **c)** $p = a - 2b$ **ç)** $p = 7a - 3b + 6$

d) $p = a^2 + 2b$ **dh)** $p = a(2b - 5)$ **e)** $p = a^2 + 2ab$ **ë)** $p = 3a^2 - 2ab - b^2$

3. Njehsoje vlerën e T në secilën prej formulave, nëse:

I $a = 3, b = 2, c = 5$ II $a = -1, b = 4, c = 3$ III $a = -2, b = -3, c = -4$

a) $T = ab + c$ **b)** $T = 3a + 2b - 4c$ **c)** $T = (2a + b - c)^2$ **ç)** $T = 2a^2 + 5b - c$

4. Njehsoje vlerën e y në secilën prej formulave, nëse: I $x = 2$ II $x = -2$

a) $y = \frac{x - 4}{4}$ **b)** $y = \frac{x + 3}{x - 1}$ **c)** $y = 8 - \frac{6}{x}$ **ç)** $y = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$

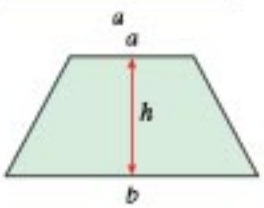
5. Formula për perimetrin P të drejtkëndëshit është $P = 2a + 2b$



a) Njehsoje vlerën e P, nëse $a = 7{,}5$ dhe $b = 3{,}6$.

b) Njehsoje vlerën e a, nëse $P = 50$ dhe $b = 4{,}7$.

6. Formula e syprinës S të trapezit është $S = \frac{1}{2}(a + b)h$



a) Njehsoje vlerën e S, nëse $a = 7$, $b = 6$ dhe $h = 8$.

b) Njehsoje vlerën e h, nëse $S = 40$, $a = 3$ dhe $b = 5$.

c) Njehsoje vlerën e b, nëse $S = 60$, $a = 4$ dhe $h = 12$.

7. $F = \frac{mv - mu}{t}$ është formula që përdoret në fizikë.

a) Njehsoje vlerën e F, nëse $m = 5$, $v = 8$, $u = 3$ dhe $t = 2$.

b) Njehsoje vlerën e F, nëse $m = 7$, $v = 10$, $u = -2$ dhe $t = 5$.

c) Njehsoje vlerën e m, nëse $F = 20$, $v = 9$, $u = 4$ dhe $t = 2$.

8. Për një koncert janë shitur x bileta, secila nga 350 denarë dhe $(x + 18)$ bileta, secila nga 480 denarë.

Shkruaj formulë për çmimin e përgjithshëm të biletave të shitura.

9. Një revistë kushton b denarë, kurse një gazetë kushton b - 3 denarë.

Shkruaj formulë për shumën që duhet paguar për 4 revista dhe 8 gazeta.

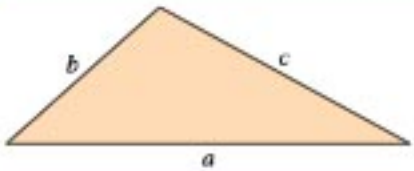
10. Elena bleu x qirinj.

Një qiri kushton 30 denarë. Ajo pagoi me bankënotë prej 500 denarë.

Shkruaj formulë për kusurin K që ka fituar Elena.

11. Formula e Heron-it mund të përdoret për të njehsuar syprinën S të trekëndëshit nëse dihen gjatësitë e të tri brinjëve të saja.

Mund të lexosh më tepër për Heronin në Internet.



$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ku $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Me ndihmën e kësaj formule njehsoje syprinën e trekëndëshit me brinjët 5 cm, 7 cm dhe 10 cm.

12. Në vizatim është paraqitur torusi.

Torusi është 3D-formë që formohet kur qarku më i vogël me rreze r rrotullohet përgjatë gjatësisë së qarkut më të madh me rreze R.



Formulat për vëllimin V dhe syprinën S të torusit janë:

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2 \quad \text{dhe} \quad S = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

a) Njehso vlerën e V dhe S, nëse $R = 7$ cm dhe $r = 4$ cm.

b) Përcakto formulë që i lidh V, S dhe r.

Zëvendësimi në shprehje

Zëvendësimi në shprehje është mënyra me të cilën në vend të shkronjave që ndodhen në shprehje i shkruajmë vlerat e dhëna përkatëse.

Pasi të zëvendësojmë, duhet ta njehsojmë vlerën e shprehjes, por kujdes në rendin (përparësitë) e kryerjes së operacioneve.

1. I njehsojmë shprehjet në kllapat.
2. Pastaj i njehsojmë fuqitë.
3. Pastaj pjesëtojmë dhe shumëzojmë.
4. Në fund mbledhim dhe zbresim.

Kllapa
Fuqia
Pjesëtimi dhe Shumëzimi
Mbledhja dhe Zbritja

Shembulli 3

Nëse $x = 3$ dhe $y = -4$, njehsoje vlerën e:

a) $5x + 3y$ **b)** $x^2 + y^2$ **c)** $2x^2 + y$ **ç)** $4xy + 3y^2$

a) $5x + 3y = (5 \cdot 3) + (3 \cdot (-4))$
$= 15 + (-12)$
$= 3$

b) $x^2 + y^2 = 3^2 + (-4)^2$
$= 9 + 16$
$= 25$

c) $2x^2 + y = 2 \cdot 3^2 + (-4)$
$= 18 - 4$
$= 14$

ç) $4xy + 3y^2 = (4 \cdot 3 \cdot (-4)) + 3 \cdot (-4)^2$
$= -48 + 48$
$= 0$

Detyra

1. Nëse $x = 7$, njehsoje vlerën e shprehjeve:

a) $5x - 3$ **b)** $x^2 + 1$ **c)** $8 - 2x$ **ç)** $3x^2$

d) $2x^2 - 4$ **dh)** $\frac{x+3}{5}$ **e)** $\frac{2x+1}{5x-5}$ **ë)** $\frac{x^2+1}{x-4}$

f) x^3 **g)** $(2x)^2 + 5x$ **gj)** $2x + \frac{x}{14}$ **h)** $x^2 - \frac{21}{x}$

2. Nëse $x = 3$ dhe $y = 5$, njehsoje vlerën e shprehjeve

a) $2x + 4y$ **b)** $5x - 3y$ **c)** $3xy$ **ç)** $x^2 + y^2$

d) $2x^2y$ **dh)** $3xy^2 - 4x$ **e)** $\frac{x+y}{2}$ **ë)** $\frac{4xy}{5}$

f) $\frac{x^3}{y+4}$ **g)** $(2xy)^2$ **gj)** $(x - y)^2$ **h)** $\left(\frac{3x}{2y}\right)^2$

3. Nëse $a = 2$, $b = -3$ dhe $c = -4$, njehsoje vlerën e shprehjeve:

a) $2a + 3b$ **b)** abc **c)** $ab + c$ **ç)** $a^2 + b^2 + c^2$

d) $2b^2 + a$ **dh)** $5ac$ **e)** $b^3 + 1$ **ë)** $5c^2 - b$

f) $(ab)^2 + c$ **g)** $\frac{c}{a} + b$ **gj)** $(a + b - c)^2$ **h)** $\left(\frac{5ab}{c+2}\right)^2$

4. Cakto x ashtu që të tri shprehjet e dhëna të kenë vlerë të barabartë.

$x^2 + 13$ $2x^2 - 12$ $3x^2 + 4x - 17$

7.2 Të shprehurit e ndryshores

Në formulën $P = ax + b$, ndryshorja P është **shprehur** përmes ndryshoreve a, x dhe b.

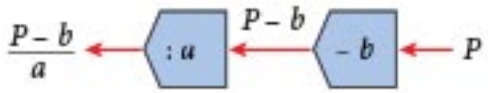
Nëse duam ta shprehim ndryshoren x, prej formulës së njëjtë, duhet ta nxjerrim atë formulë duke shfrytëzuar formulën e dhënë. Këtë mund ta bëjmë në dy mënyra.

Mënyra e parë: Metoda e makinës funksionale inverse

Makinë funksionale është:

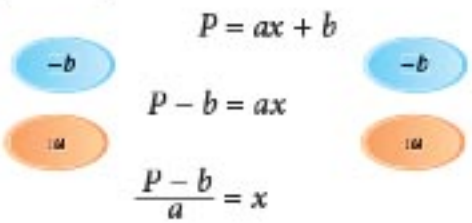


Makinë funksionale inverse është:



Sipas kësaj, $x = \frac{P-b}{a}$

Mënyra e dytë: Transformimet ekuivalente



Gjatë nxjerrjes së formulave i përdorim të njëjtat rregulla të cilat vlejnë për zgjidhjen e barazimeve.

Përdorim operacione inverse.

Shembulli 1

Shprehe ndryshoren x prej formulës $a(bx - c) = d$.

$a(bx - c) = d$ — Lirohemi prej kllapave.

$abx - ac = d$ — Shtojmë ac në të dy anët.

$abx = d + ac$ — Të dy anët i pjesëtojmë me ab.

$x = \frac{d+ac}{ab}$

Detyra

1. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $x + 2 = y$ **b)** $x + a = b$ **c)** $x - 5 = pq$ **ç)** $x - p = 3q$

d) $t = x - 2u$ **dh)** $v^2 = x + y$ **e)** $a^2 + x = b$ **ë)** $x - a^2 = 2a$

f) $x - p = q + r$ **g)** $b - c = x + a$ **gj)** $ab + x = c$ **h)** $r = x - pq$

2. Shprehe y prej formulave të dhëna

a) $5y = a$ **b)** $ay = b$ **c)** $a\,y = 2e$ **ç)** $3by = c$

d) $pq\,y = r$ **dh)** $ay = \pi r^2$ **e)** $3y = 2a + b$ **ë)** $cy = a - b$

f) $5y = 9x - 15$ **g)** $xy = x + 2$ **gj)** $xy = fg - 5$ **h)** $7y = 5x - 1$

i) $y(a + b) = c$ **j)** $y(p - 3q) = 2r$ **k)** $y(2p - q) = 5p + 2q$ **l)** $y(3 - a) = a^2 + b^2$

3. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $2x + a = b$ **b)** $5x - q = r$ **c)** $y = 2x - 5$ **ç)** $p = 3x + 2q$

d) $c = 7x + 4y$ **dh)** $y = mx + c$ **e)** $2x + y = z$ **ë)** $4x - y = 8$

f) $ax + b = c$ **g)** $2ax - b = 10$ **gj)** $3x - 4 = y$ **h)** $a^2 + b^2x = c^2$

i) $abx + c = d$ **j)** $3fx - g^2 = h^2$ **k)** $8x - 2f = 5g + h$ **l)** $ab + c = 5d + 2x$

4. Ivo dhe Darko donin ta shprehin ndryshoren x prej formulës $w = 2(x + b)$

Ivo shkroi:

$$w = 2(x + b)$$
$$w = 2x + 2b$$
$$w - 2b = 2x$$
$$\frac{w - 2b}{2} = x$$

Darko shkroi:

$$w = 2(x + b)$$
$$\frac{w}{2} = x + b$$
$$\frac{w}{2} - b = x$$

Cili prej tyre ka të drejtë? Shpjego përgjigjen.

5. Shprehe x nga formulat vijuese.

a) $3(x + 2) = y$ **b)** $a(x + b) = c$ **c)** $a = 8(x - b)$ **ç)** $3p = 5(x + 2q)$

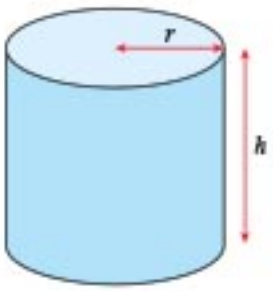
d) $2a = c(x - b)$ **dh)** $4g(h + x) = h$ **e)** $p = q(2 + x)$ **ë)** $a^2(x - b) = c^2$

f) $p(x + 5q) = 8$ **g)** $ab(a + x) = c$ **gj)** $a(2x + 3b) = c$ **h)** $a^2(3 + 4x) = b$

6. $v = u + at$ është formula që përdoret në fizikë.

a) Shprehe u **b)** Shprehe a **c)** Shprehe t

7. Formula për syprinën S të cilindrit është $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$, ku r është rrezja, kurse h është lartësia.

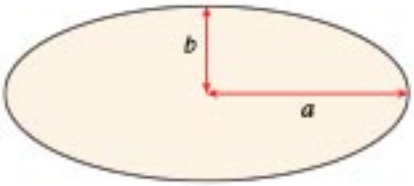


a) Njehsoje syprinën nëse $r = 5$ cm dhe $h = 8$ cm.
Shkruaj zgjidhjen pa e njehsuar vlerën e π.

b) Shprehe h prej formulës.

c) Caktoje vlerën e h nëse $S = 600$ cm^2 dhe $r = 8$ cm.
Zgjidhjen rrumbullakoje deri në tri shifra të rëndësishme.

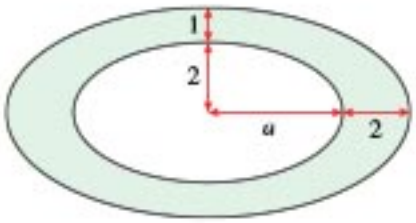
8.



Në vizatim është paraqitur elipsa.

Formula për gjetjen e syprinës S të elipsës është $S = \pi ab$.

a) Trego se syprina S e zonës së ngjyrosur të vizatimit të dytë mund të njehsohet me formulën $S = \pi a + 6\pi$.



b) Shprehe a prej formulës $S = \pi a + 6\pi$.

c) Shfrytëzoje rezultatin nën **b)** që ta gjesh vlerën e a nëse syprina e zonës së ngjyrosur është 30 cm^2.

Shkruaje zgjidhjen e rrumbullakuar në 3 shifra të rëndësishme.

Formulat me koeficientë negative para x

Formula $a = b - 3x$ ka koeficient negativ para x.

Më lehtë është kur punojmë me koeficient pozitiv para x. Në këtë rast duhet të bartet anëtari që përmban x në anën tjetër të barazimit për të mbetur pozitiv.

Shembulli 2

Shprehe x prej formulës $a = b - 3x$.

$$a = b - 3x$$ Shtojmë $3x$ në dy anët.

$$a + 3x = b$$ Zbresim a në dy anët.

$$3x = b - a$$ Të dy anët i pjesëtojmë me 3.

$$x = \frac{b - a}{3}$$

Detyra

1. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $y = 2 - x$ **b)** $a = b - x$ **c)** $p = 2q - x$ **ç)** $3pq - x = 7$

d) $a^2 - x = b^2$ **dh)** $p + q = r - x$ **e)** $2a - 3b = 5c - x$ **ë)** $a = b + c - x$

f) $2f = g - 2x$ **g)** $f - gx = h$ **gj)** $mn = 8 - 5x$ **h)** $p^2 = 2a - 3x$

i) $a^2 + ab = b - cx$ **j)** $5b^2 - a^2x = c$ **k)** $4y - 3x = 5z$ **l)** $m^2 - 2mnx = n^2$

2. Shprehe y prej formulave të dhëna.

a) $9 = 2(x - y)$ **b)** $d = 5(2 - y)$ **c)** $a = 3(b - y)$ **ç)** $h(g - y) = a$

d) $a(b - y) = c$ **dh)** $h(h - y) = c$ **e)** $a^2 = b(c - y)$ **ë)** $p = q(r + t - y)$

f) $5(a^2 - y) = b$ **g)** $8(pq - 2y) = r$ **gj)** $7p = 2(q - 3y)$ **h)** $2fg(3 - y) = 4h$

3. $Ft = mv - mu$ është formulë që përdoret në fizikë.

a) Shprehe t **b)** Shprehe v **c)** Shprehe u

Formulat me thyesa

Që t'i rirenditim formulat të cilat përfshijnë thyesa, duhet t'i dimë rregullat për thyesat algjebrike.

Shembulli 3

Shprehe x prej formulës $\frac{x-a}{2} = y$

$\frac{x-a}{2} = y$ — Të dy anët i shumëzojmë me 2

$x - a = 2y$ — Shtojmë a në dy anët.

$x = 2y + a$

Shembulli 4

Shprehe x prej formulës $\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$

$\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$ — Në secilën anë ka nga një thyesë, prandaj përdorim shumëzimin kryq.

$b \cdot x = 4 \cdot 5a$

$bx = 20a$

$x = \frac{20a}{b}$

Detyra

1. Shprehe x prej formulave të dhëna

a) $\frac{x}{3} = y$ **b)** $\frac{x}{a} = p$ **c)** $\frac{x}{7} = ab$ **ç)** $h = \frac{x}{g}$

d) $p^2 = \frac{x}{q}$ **dh)** $a + 2 = \frac{x}{c}$ **e)** $\frac{x}{4} = p + q$ **ë)** $\frac{x}{5} = 2a - b$

f) $\frac{x}{2+y} = 4$ **g)** $\frac{x}{a-b} = c$ **gj)** $\frac{x}{a^2 + c^2} = b^2$ **h)** $\frac{x}{2g + 3h} = 5f$

2. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $p = \frac{x+7}{3}$ **b)** $\frac{x-8}{5} = y$ **c)** $\frac{x-a}{b} = c$ **ç)** $\frac{x-2m}{5} = n$

d) $a = \frac{5-x}{4}$ **dh)** $\frac{6-x}{a} = b$ **e)** $\frac{m-x}{2} = n$ **ë)** $ab = \frac{a-3x}{b}$

3. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\frac{3}{x} = y$ **b)** $\frac{a}{x} = t$ **c)** $\frac{2p}{x} = q$ **ç)** $\frac{y}{x} = 2$

d) $\frac{x}{4} = \frac{a}{b}$ **dh)** $\frac{x}{p} = \frac{q}{r}$ **e)** $\frac{5x}{a} = \frac{2b}{c}$ **ë)** $\frac{px}{q} = \frac{q}{p}$

f) $y = \frac{a+b}{x}$ **g)** $a^2 = \frac{b^2-c^2}{x^2}$ **gj)** $2ab = \frac{c+d}{x}$ **h)** $\frac{a+b}{x} = c+d$

4. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\frac{5}{x-3} = y$ **b)** $\frac{7}{x+2} = p$ **c)** $\frac{8}{3-x} = a$ **ç)** $\frac{a}{x+b} = c$

d) $\frac{f}{g-x} = h$ **dh)** $\frac{a^2}{a-x} = 5b$ **e)** $\frac{m}{8-3x} = 2n$ **ë)** $\frac{ab}{c-bx} = c$

5. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\frac{1}{x} + 2 = y$ **b)** $\frac{1}{x} - a = b$ **c)** $\frac{1}{x} - pq = p$ **ç)** $\frac{1}{x} - y^2 = 5y$

6. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\frac{1}{2}x + 5 = y$ **b)** $\frac{1}{3}x - a = b$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + c$ **ç)** $p = q - \frac{x}{4}$

d) $m = n - \frac{x}{5}$ **dh)** $y = 2 - \frac{x}{5}$ **e)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ **ë)** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 12$

7. Formula për njehsim të kamatës së thjeshtë është $I = \frac{Kpt}{100}$

a) Shprehe p **b)** Shprehe K **c)** Shprehe t

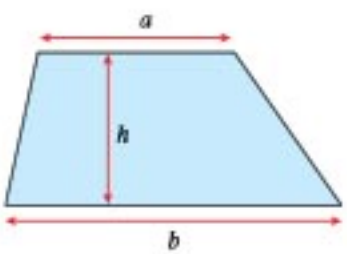
8. $s = \frac{1}{2}(u+v)t$ është formula që përdoret në fizikë.

a) Shprehe t **b)** Shprehe u **c)** Shprehe v

9. $v = \frac{s}{t}$ është formula që lidh shpejtësinë, rrugën dhe kohën.

a) Shprehe s **b)** Shprehe t

10. $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ është formula për syprinën S të trapezit.



a) Shprehe h prej formulës.

b) Njehsoni h nëse $S = 75$ cm^2, $a = 8$ cm dhe $b = 12$ cm.

c) Shpreh b prej formulës.

ç) Njehso b nëse $S = 58$ cm^2, $a = 10$ cm dhe $h = 8$ cm.

11. Formula $F = \frac{9C}{5} + 32$ përdoret për shndërrim të shkallëve celsius (°C) në shkallë Farenhajt (°F)

a) Trego se formula mund të shkruhet si $C = \frac{5(F-32)}{9}$

b) Shfrytëzo formulën nën **a)** që ta gjesh vlerën e C kur $F = -31$.

c) Trego se kur C është e barabartë me -40, atëherë edhe F është e barabartë me –40.

Formulat me fuqi, katrorë dhe rrënjë katrore

Me rëndësi është të mbajmë mend:

nëse $x^2 = 25$

atëherë $x = \pm \sqrt{25}$

$x = \pm 5$ Kontrollim: $5^2 = 25$ ✓ dhe $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ ✓

Ta shprehim x prej formulës $x^2 - b = a$

$$x^2 - b = a$$

+b

$$x^2 = a + b$$

+b

√

$$x = \pm \sqrt{a+b}$$

√

Shembulli 5

Shprehe x prej formulës $ax^2 - 5 = b$.

$ax^2 - 5 = b$ Shtojmë 5 në dy anët.

$ax^2 = b + 5$ I pjesëtojmë dy anët me a.

$x^2 = \frac{b+5}{a}$ Kërkojmë rrënjë katrore në dy anët.

$x = \pm\sqrt{\frac{b+5}{a}}$

Mos harro të vendosësh shenjën ± para rrënjës katrore

Shembulli 6

Shprehe x prej formulës $\sqrt{2x-3} = y$.

$\sqrt{2x-3} = y$

$2x - 3 = y^2$ Ngritim në katrorë të dy anët.

$2x = y^2 + 3$ Shtojmë 3 në dy anët.

$x = \frac{y^2+3}{2}$ I pjesëtojmë anët me 2.

Shembulli 7

Formula për syprinën e rrethit është $S = \pi r^2$.

Shprehe r prej formulës.

$S = \pi r^2$ I pjesëtojmë të dy anët me π.

$\frac{S}{\pi} = r^2$ Kërkojmë rrënjë katrore në dy anët.

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Meqenëse r është gjatësi, ajo patjetër duhet të jetë numër pozitiv, pra nuk e shkruajmë shenjën ±.

Detyra

1. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $x^2 = a$ **b)** $x^2 = pq$ **c)** $2x^2 = y$ **ç)** $x^2 + 4 = m$

d) $x^2 - 5 = 4b$ **dh)** $x^2 + a = b$ **e)** $x^2 - 2f = g$ **ë)** $2x^2 + 3 = y$

f) $ax^2 + b = c$ **g)** $px^2 + 3q = 5r$ **gj)** $7 - x^2 = 2y$ **h)** $8 - 3x^2 = 2a$

2. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\frac{x^2}{2} - 4 = y$ **b)** $\frac{x^2}{a} + b = c$ **c)** $5 - \frac{x^2}{4} = a$ **ç)** $pq - \frac{x^2}{3} = r$

3. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $\sqrt{x} = c$ **b)** $\sqrt{x} = 5p$ **c)** $\sqrt{x+2} = c$ **ç)** $\sqrt{x+4} = 3a$

d) $\sqrt{x+a} = b$ **dh)** $\sqrt{x-f} = 5$ **e)** $\sqrt{x-2m} = 3n$ **ë)** $2\sqrt{x-4} = y$

f) $a\sqrt{x} = b$ **g)** $\sqrt{ax} = b$ **gj)** $\sqrt{\frac{x}{4}} = d$ **h)** $n = \sqrt{\frac{x}{m}}$

i) $\sqrt{\frac{x+2}{5}} = q$ **j)** $\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{c}$ **k)** $\sqrt{\frac{2}{3x}} = y$ **l)** $\sqrt{\frac{1}{x-4}} = a$

4. Formula për njehsim të syprinës së topit është $S = 4\pi r^2$.

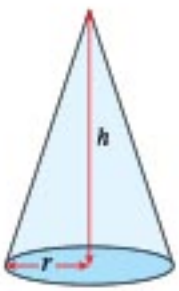


a) Shprehe r prej formulës.

b) Shfrytëzoje rezultatin nën **a)** që ta gjesh vlerën e r kur $S = 20\ \text{cm}^2$.

Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

5. Formula për njehsim të vëllimit të konit është $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



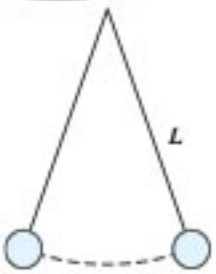
a) Shprehe r prej formulës.

b) Njehsoje vlerën e r kur $V = 50\ \text{cm}^3$ dhe $h = 12\ \text{cm}$.

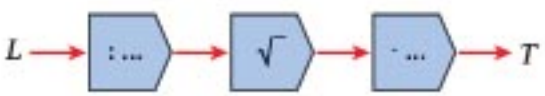
Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$

Kjo paraqet formulën që njehson kohën T në sekonda, për një oscilim të lavjerrësit me gjatësi L metra.



a) Përshkruaje dhe plotësoje makinën funksionale për gjetje të T.



b) Shfrytëzoje makinën tënde funksionale nën **a)** që të gjesh vlerën e T kur $L = 0{,}2$ m.

Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

c) Rivizatoje dhe plotësoje makinën funksionale inverse që ta shprehësh T prej formulës.



ç) Shfrytëzoje zgjidhjen nën c) që ta gjesh vlerën e L kur $T = 1$ sekondë.

Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

7. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ është formulë shumë e njohur për të cilën do të mësosh në shkollë të mesme.

Trego se mund ta shprehësh c respektivisht do të fitosh formulën: $c = \frac{b^2 - (2ax + b)^2}{4a}$

Trego të gjithë hapat e ndërmarrë.

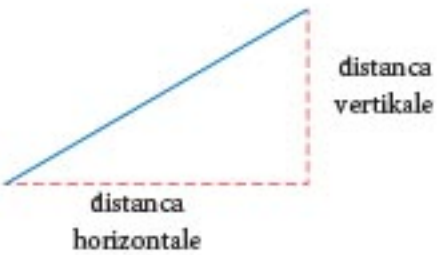
7.3 Koeficienti i drejtimit të grafikut të funksionit

Me **koeficient të drejtimit (pjerrtësisë)** të drejtëzës përcaktojmë si është e pjerrtësuar ajo drejtëz.

Drejtëza mund të ketë koeficient drejtimi pozitiv, negativ dhe nulti koeficient drejtimi.

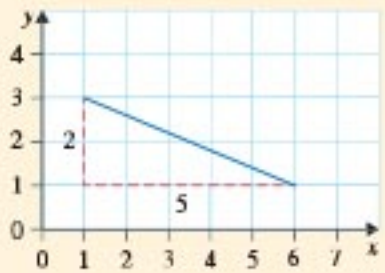


$$\text{Koeficienti i drejtimit} = \frac{\text{distanca vertikale}}{\text{distanca horizontale}}$$



Shembulli

Përcaktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzës që kalon nëpër pikat (1, 3) dhe (6, 1).



Vizatojmë drejtëzën nëpër dy pika.

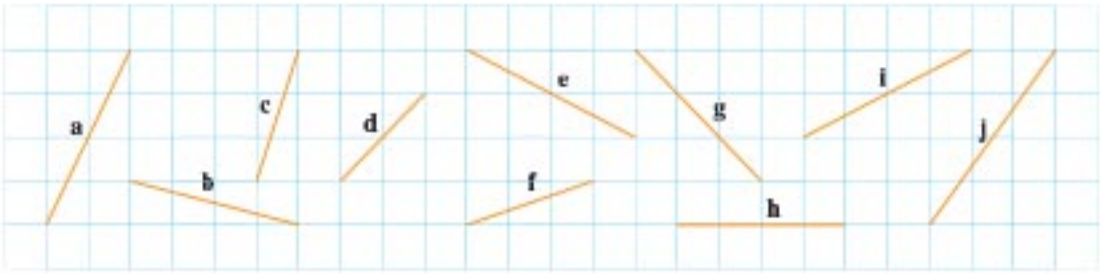
$$\text{koeficienti i drejtimit} = \frac{\text{distanca vertikale}}{\text{distanca horizontale}}$$

$$\text{koeficienti i drejtimit} = -\frac{2}{5}$$

Vërejmë se koeficienti i drejtimit është negativ.

Detyra

1. Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzave të dhëna.



2. Vizato drejtëzat që lidhin këto çifte pikash.

Caktoje koeficientin e drejtimit për secilën drejtëz.

a) (1, 2) dhe (3, 6)
b) (6, 3) dhe (3, 4)
c) (2, 1) dhe (4, 2)
ç) (4, −2) dhe (6, 1)
d) (1, −3) dhe (6, −4)
dh) (−2, −6) dhe (2, −4)
e) (−3, 2) dhe (−2, −4)
ë) (−6, −6) dhe (−3, −3)

3. Drejtëza që kalon nëpër pikat (1, 3) dhe (6, a) ka koeficient drejtimi 2.

Caktoje vlerën e a.

4. Drejtëza që kalon nëpër pikat (2, 0) dhe (6, -6) ka koeficient drejtimi të njëjtë me drejtëzën që kalon nëpër pikat (-1, 2) dhe (7, b).

Caktoje vlerën e b.

5. Pjerrtësia e drejtëzës AB është $\frac{4}{5}$.

Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzës që është normale me drejtëzën AB.

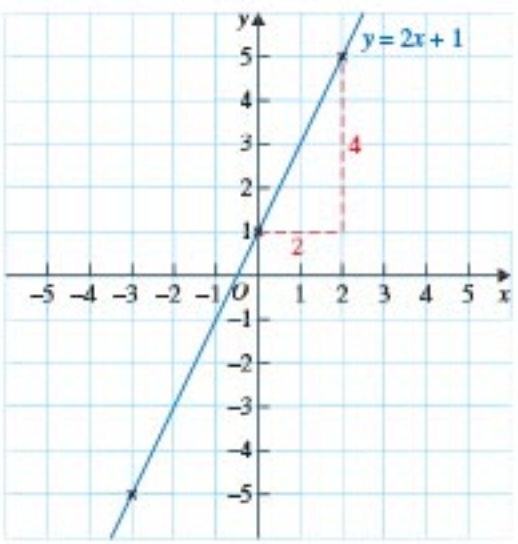
7.4 Grafiku i funksionit linear

Funksioni linear i llojit $y = mx + c$

Në klasën VII dhe VIII mësuam si vizatohen grafikët e funksioneve lineare
të llojit $y = mx + c$.

Për shembull, për të vizatuar grafikun e $y = 2x + 1$, ndërtojmë tabelën e vlerave, i shënojmë pikat në sistemin koordinativ dhe pastaj i bashkojmë me drejtëz.

x	-3	0	2
y	-5	1	5



Koeficientin e drejtimit të drejtëzës $y = 2x + 1$ mundemi ta gjejmë me çfarëdo dy pika të drejtëzës.

Nëse i marrim pikat (0, 1) dhe (2, 5), fitojmë:

$$\text{koeficienti i drejtimit} = \frac{\text{distanca vertikale}}{\text{distanca horizontale}} = \frac{4}{2} = 2$$

Prandaj, koeficienti i drejtimit të drejtëzës $y = 2x + 1$ është 2.

Ngjashëm, mundemi të tregojmë se koeficienti i drejtimit të drejtëzës $y = 3x - 5$ është 3.

Pra, rregulla e përgjithshme do të jetë:

Grafiku i $y = mx + c$ është drejtëz, ku m = koeficient i drejtimit të drejtëzës.

Shembulli 1

Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzave:

a) $y = 6x - 1$ **b)** $y = 5 - 3x$ **c)** $x + 2y - 6 = 0$

a) $y = 6x - 1$ Koeficienti i drejtimit = 6

b) $y = 5 - 3x$ Barazimin e shkruajmë në formën $y = mx + c$

$y = -3x + 5$ Koeficienti i drejtimit = -3

c) $x + 2y - 6 = 0$ Barazimin e shkruajmë në formën $y = mx + c$

$2y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ Koeficienti i drejtimit = $-\frac{1}{2}$

Shembulli 2

Cakto barazimin e drejtëzës me koeficient të drejtimit 3 që kalon nëpër pikën (2, 5).

Koeficienti i drejtimit është 3, prandaj $m = 3$ e zëvendësojmë në barazimin y = $mx + c$.

$y = 3x + c$

Pika (2, 5) shtrihet në drejtëzën, prandaj në barazimin zëvendësojmë vlerat $x = 2$ dhe $y = 5$.

$5 = (3 \cdot 2) + c$

$c = -1$

Barazimi i drejtëzës është $y = 3x - 1$

Detyra

1. Vizato drejtëzat dhe cakto koeficientët e tyre të drejtimit.

   a) $y = x + 4$ **b)** $y = 3x - 1$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **ç)** $y = 5 - 2x$

2. Shkruaj koeficientin e drejtimit për drejtëzat e dhëna.

   a) $y = 2x + 5$ **b)** $y = 3x + 7$ **c)** $y = x + 4$ **ç)** $y = \frac{1}{2}x + 7$

   d) $y = -2x + 3$ **dh)** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **e)** $y = 2x$ **ë)** $y = 6$

3. Jovani thotë se koeficienti i drejtimit të drejtëzës $y = 3 - 2x$ është 3.

Sqaro përse ka gabuar dhe cakto përgjigjen e saktë.

4. Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzave.

a) $y = 1 - 3x$ **b)** $y = 5 - x$ **c)** $y = 4 + 2x$ **ç)** $y = 5 - \frac{1}{2}x$

5. Shkruaje secilin prej barazimeve në formën $y = mx + c$ dhe pastaj caktoje koeficientin e drejtimit të secilës drejtëz.

a) $y - 3x = 2$ **b)** $y - 2x + 1 = 0$ **c)** $4x + y = 3$ **ç)** $5x + 2y = 10$

d) $3y - x = 9$ **dh)** $2y = 4x + 8$ **e)** $2y = 6x - 2$ **ë)** $3y - 5x = -15$

6. Cilat nga drejtëzat e dhëna janë paralele?

A $y = -2x + 2$ B $4x + 2y = 6$ Ç $2y - 2x = 7$ D $x = -\frac{1}{2}y + 5$

Drejtëzat paralele kanë koeficient drejtimi të barabartë.

7. Cakto barazimin e drejtëzës me koeficient drejtimi -2 që kalon nëpër pikën (1, 5).

8. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat (5, 4) dhe (9, -1).

Funksioni linear i llojit $ax + by = c$

Kur duhet të vizatojmë grafikun e drejtëzës së dhënë me barazimin $3x + 4y = 12$, mënyra më e lehtë do të ishte sikur t'i dimë pikëprerjet e drejtëzës me boshtet e koordinatave.

Nëse marrim $x = 0$ në barazim, do të fitojmë **pikëprerjen me boshtin y.**

Nëse $x = 0$, atëherë $4y = 12$, $y = 3$.

Kuptojmë se grafiku e pret boshtin y në 3.

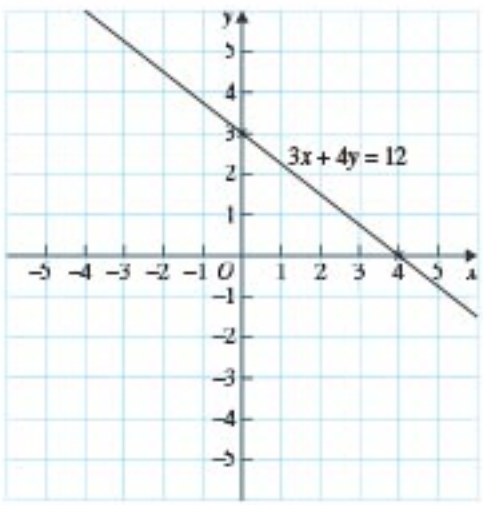
Nëse marrim $y = 0$ në barazim, do të fitojmë **pikëprerjen me boshtin x.**

Nëse $y = 0$, atëherë $3x = 12$, $x = 4$.

Kuptojmë se grafiku e pret boshtin x në 4.

Tabela e vlerave është:

x	0	4
y	3	0



Shembulli 3

Vizatoje grafikun e $3x - 7y = 21$.

Nëse $x = 0$, atëherë $-7y = 21$, $y = -3$ — Gjejmë pikëprerjen me boshtin y.

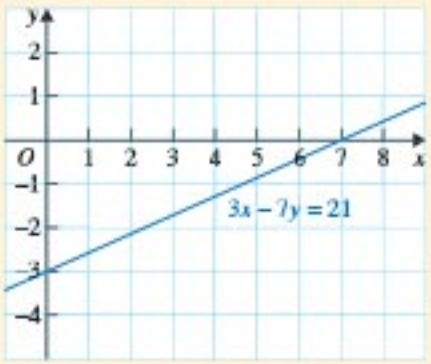
Pra, grafiku e pret boshtin y në -3.

Nëse $y = 0$, atëherë $3x = 21$, $x = 7$ — Gjejmë pikëprerjen me boshtin x.

Prandaj, grafiku e pret boshtin x në 7.

Tabela e vlerave është:

x	0	7
y	-3	0



Detyra

1. Cakto pikat në të cilat grafikët e funksioneve i presin boshtet e koordinatave, kurse pastaj vizatoji drejtëzat.

   a) $x + y = 5$ **b)** $x + y = 2$ **c)** $x + y = -3$ **ç)** $2x + y = 8$

   d) $x + 3y = 9$ **dh)** $4x + 3y = 12$ **e)** $2x + 3y = 12$ **ë)** $3x + 8y = 24$

   f) $2x + 4y = -8$ **g)** $5x + 4y = -20$ **gj)** $6x + 7y = 21$ **h)** $2x + 7y = -21$

2. Cakto pikët në të cilat grafikët e funksioneve i presin boshtet e koordinatave, kurse pastaj vizatoji drejtëzat.

   a) $x - y = 4$ **b)** $x - y = 2$ **c)** $2x - y = 4$ **ç)** $x - 3y = 9$

   d) $3x - 4y = 24$ **dh)** $5x - 2y = 10$ **e)** $2x - 5y = -10$ **ë)** $7x - 2y = 21$

7.5 Funksionet që dalin nga situatat e jetës reale

Shkencëtarët përdorin grafikone që të shfaqin trendët dhe tendencat mes dy ose më tepër parametrave. Nëse shkencëtarët pastaj mund të gjejnë funksion adekuat të trendit, atëherë mund të parashikohet si do të duket ardhmëria.

Një shembull për këtë është njohja e efekteve nga ndikimi i ndryshimeve klimatike mbi ngritjen e nivelit të detit.



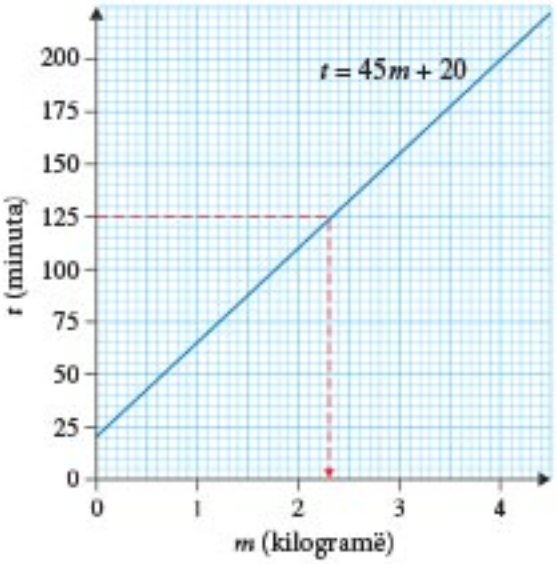
Rregulla për njehsim të kohës t për pjekje, në minuta, të pulës me masë m kilogramë është:
„pjekja zgjat 45 minuta për çdo kilogram dhe pastaj edhe 20 minuta shtesë".

Këtë rregull mund ta shkruajmë me formulën:

$t = 45m + 20$

Që ta paraqesim lidhjen mes m dhe t, përpilojmë tabelë të vlerave dhe vizatojmë grafik.

m	1	2	3	4
t	65	110	155	200



Pastaj grafikun e përdorim për t'i lexuar informatat e nevojshme.

Për shembull, masa e pulës për të cilën janë të nevojshme 125 minuta pjekje, është 2,3 kg (e paraqitur në grafikun me drejtëzat e kuqe).

Shembull

Petri ishte në Ohër. Ka mundur të huazojë anije nga kompania A ose nga kompania B.

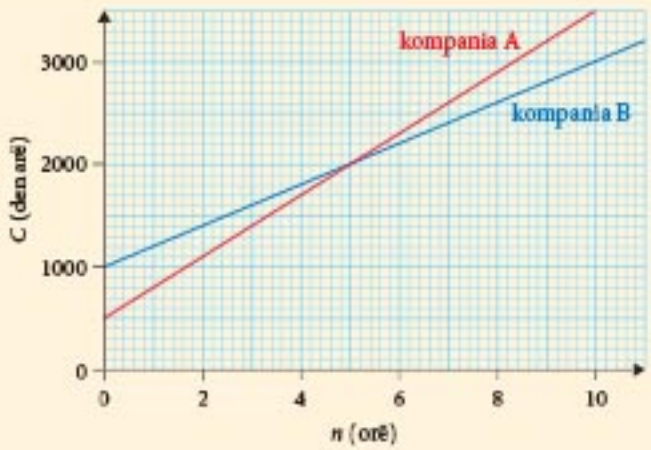
Kompania A	$C = 500 + 300n$
Kompania B	$C = 1000 + 200n$

Çmimi (C) për huazim të anijes për n orë nga secila kompani është paraqitur në tabelë.

Paraqite grafikisht çmimin e secilës kompani dhe përcakto vlerat e n për të cilat kompania A është më e shtrenjtë se kompania B.

Kompania A				
n (orë)	1	2	3	4
C (denarë)	800	1100	1400	1700

Kompania B				
n (orë)	1	2	3	4
C (denarë)	1200	1400	1600	1800



Prej grafikut mund të shihet se kompania A është më e shtrenjtë kur $n > 5$.

Detyra

1. Aliu ngroh një enë me ujë.

E shënon temperaturën në çdo 5 minuta.

Në tabelë janë paraqitur rezultatet e matjeve.

Koha, m (minuta)	5	10	15	20
Temperatura, t (°C)	10	13	16	19

a) Vizatoje grafikun e drejtëzës për t'i paraqitur të dhënat nga tabela.

b) Sa ka qenë temperatura e ujit kur filloi ta ngrohë ujin?

c) Përcaktoje koeficientin e drejtimit.

Cila e dhënë na paraqet koeficientin e drejtimit?

ç) Shfrytëzo grafikun për ta gjetur vlerën e m kur temperatura ishte 17 °C.

2. Rregulla për shndërrim të temperaturës prej C në shkallë Celsius (°C) në temperaturë F, në shkallë të Farenhajtit (°F) është:

„shumëzo me 1,8 dhe pastaj shto 32"

a) Shkruaje këtë rregull në formën "F = ..."

b) Paraqite këtë rregull në grafikun për $-50 \leq C \leq 50$.

c) Përdore grafikun që ta gjesh temperaturën:

i në °F kur ajo është 18 °C **ii** në °C kur ajo është 18°F

ç) Shfrytëzo grafikun që ta gjesh temperaturën e cila ka vlerë të njëjtë në shkallë Celsiusi dhe në shkallë Farenhajti

7.6 Proporcioni i drejtë

Nëse çmimi për një metër llastik është 6 denarë, atëherë çmimi (C) i n metrave llastik është dhënë me formulën: $C = 6n$.



Në tabelë janë paraqitur disa vlera të mundshme të n dhe të C.

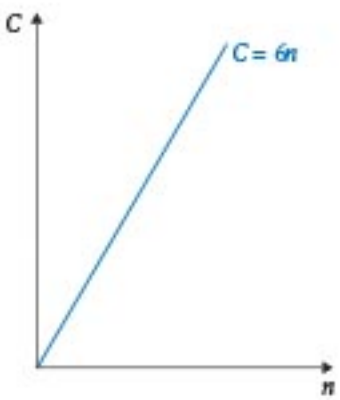
n (metra)	1	2	3	4	5	6
C (denarë)	6	12	18	24	30	36

Kjo do të thotë se:

nëse n zmadhohet dyfish, atëherë po ashtu edhe C do të zmadhohet dyfish

nëse n zmadhohet tri herë, atëherë po ashtu edhe C do të zmadhohet tri herë.

Sasitë n dhe C themi se janë proporcionale të drejta, kurse grafiku i n në lidhje me C do të jetë drejtëz e cila kalon nëpër origjinën e koordinatave.



Nëse y është në proporcion të drejtë me x, atëherë $y = kx$, ku k është koeficienti i përpjesëtimit (proporcionit).

Shembull

y është në proporcion të drejtë me x.

Kur $y = 4$, atëherë $x = 5$.

a) Cakto formulë që lidh y dhe x.

b) Cakto y, kur $x = 3$.

a) y është në proporcion të drejtë me x. Kemi

$y = kx$

$4 = 5k$ $y = 4$ dhe $x = 5$ i zëvendësojmë në barazimin.

$k = \frac{4}{5}$ Të dy anët i pjesëtojmë me 5.

Formula është $y = \frac{4}{5}x$

b) Kur $x = 3$, $y = \frac{4}{5} \cdot 3 = 2{,}4$ $x = 3$ e zëvendësojmë në formulën nën **a)**.

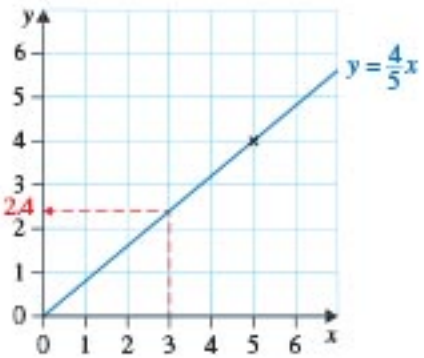
Shembullin mund ta ilustrojmë me grafik.

Meqenëse y është në proporcion të drejtë me x, grafiku do të jetë drejtëz e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave (0, 0) dhe pikën (5, 4).

Drejtëza ka koeficient drejtimi $\frac{4}{5}$,

kurse barazimi i drejtëzës është $y = \frac{4}{5}x$

Vija e kuqe e me ndërprerje tregon kur $x = 3$, atëherë $y = 2{,}4$.



Detyra

1. y është në proporcion të drejtë me x.
   $y = 18$ kur $x = 6$
   a) Përcakto formulë që lidh y dhe x.
   b) Përcaktoje vlerën e y kur $x = 12$.
2. y është në proporcion të drejtë me x.
   $y = 15$ kur $x = 20$
   a) Përcakto formulë që lidh y dhe x.
   b) Përcaktoje vlerën e y kur $x = 34$.
3. p është në proporcion të drejtë me q.
   $p = 0{,}5$ kur $q = 8$
   a) Përcakto formulë që lidh p dhe q.
   b) Përcaktoje vlerën e p kur $q = 20$.
   c) Përcaktoje vlerën e q kur $p = 0{,}2$.

4. Rruga e kaluar d, në metra, nga një biçiklist është në proporcion (përpjesëtim) të drejtë me numrin e rrotullimeve n, të bëra nga rrota e biçikletës.

Jovani kaloi 21 m me 10 rrotullime të rrotës së biçikletës.

a) Përcakto formulë e cila ndërlidhë d dhe n.

b) Përcakto rrugën e përshkruar kur $n = 27$.



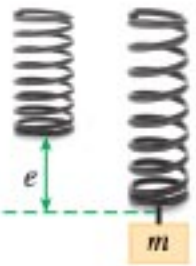
5. Zgjatja (e) e spirales, në cm, është në proporcion të drejtë me masën m, në kg, të trupit që e kemi varur në njërin skaj të spirales.

Kur $e = 3$, $m = 5$

a) Përcakto formulë e cila e lidh e dhe m.

b) Përcakto e, kur $m = 6$.

c) Përcakto m, kur $e = 2{,}6$.



6. Koha t, në sekonda, e nevojshme për një oscilim të lavjerrësit është në përpjesëtim të drejtë me rrënjën katrore të gjatësisë l, në metra të lavjerrësit.

$t = 1{,}6$ kur $l = 0{,}64$

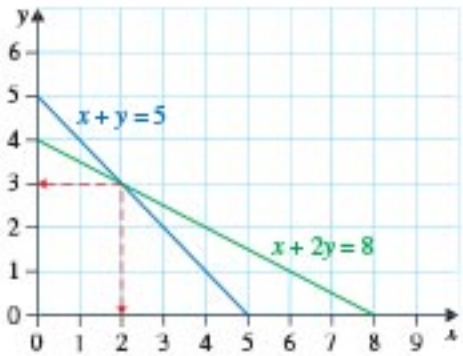
a) Përcakto formulë që e lidh t dhe l.

b) Përcakto t, kur $l = 0{,}81$.



7.7 Zgjidhja grafike e sistemeve të barazimeve

Barazimet $x + y = 5$ dhe $x + 2y = 8$ mund t'i paraqesim grafikisht në të njëjtin sistem koordinativ, siç është treguar në vizatim.



Drejtëzat priten në pikën (2, 3).

Zgjidhja e **sistemit të barazimeve**:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

është $x = 2$, $y = 3$

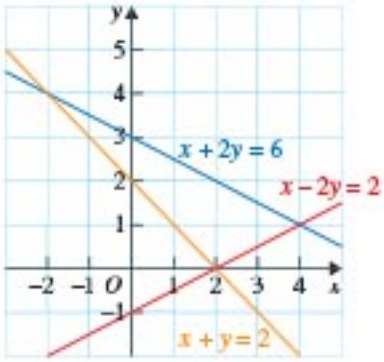
Kontrollim: vlerat numerike të x dhe y i zëvendësojmë në barazimet fillestare.

$2 + 3 = 5$ ✓ dhe $2 + (2 \cdot 3) = 8$ ✓

Sistem i barazimeve formohet prej dy ose më tepër barazimeve për të cilat kërkojmë zgjidhje të përbashkëta.
Barazimet i shkruajmë njërën nën tjetrën dhe i shënojmë me kllapën {.

Detyra

1. Zgjidhi grafikisht sistemet e barazimeve:



   a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

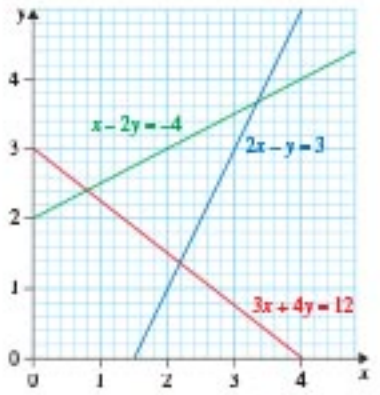
   b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

2. Zgjidhe grafikisht sistemin e barazimeve.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

3. Zgjidhi grafikisht sistemet e barazimeve:



   a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

   Zgjidhjet rrumbullakoji në një vend dhjetor.

4. Zgjidhe grafikisht sistemin e barazimeve.

$$\begin{cases} 3x + 7y = 21 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$

   Zgjidhjet rrumbullakoji në një vend dhjetor.

7.8 Zgjidhja e sistemit të barazimeve me metodën e eliminimit

Barazimi $2x + y = 6$ ka dy ndryshore x dhe y.

Ekzistojnë shumë çifte vlerash të x dhe y për të cilat është i saktë barazimi $2x + y = 6$.

Të tilla janë, për shembull: $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 2$ $x = 4, y = -2$

Barazimi $4x + y = 8$ po ashtu ka dy ndryshore x dhe y.

Përsëri, ekzistojnë shumë çifte vlerash të x dhe y që e plotësojnë barazimin $4x + y = 8$.

Disa zgjidhje të mundshme janë: $x = 0, y = 8$ $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 0$

Kur zgjidhim **sistem të barazimeve**, duhet të gjejmë çiftin e vlerave të x dhe y për të cilat të dy barazimet në sistem kalojnë në barazime të sakta numerike.

Zgjidhje e sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

është $x = 1$, $y = 4$ meqenëse për këtë çift vlerash janë të sakta të dy barazimet.

Mirëpo, metodë më e shpejtë për zgjidhjen e sistemit të barazimeve është përdorimi i metodës algjebrike:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 & [1] \\ 2x + y = 6 & [2] \end{cases}$$

Këtë metodë, me të cilën e eliminojmë njërën ndryshore, e quajmë metoda e eliminimit.

Ndryshimi Barazimi [1] - Barazimi [2] do t'i eliminojë anëtarët që përmbajnë y.

$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Për të gjetur vlerën e y, zëvendësojmë $x = 1$ në barazimin [1].

$$4 + y = 8$$
$$y = 4$$

Zgjidhja e sistemit është $x = 1, y = 4$.

Bëj kontroll të zgjidhjes me zëvendësim të vlerave përkatëse të x dhe y në barazimet fillestare.

Shembulli 1

Zgjidhe sistemin e barazimeve: $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 & [1] \\ x + 2y = -1 & [2] \end{cases}$$

Ndryshimi Barazimi [1] - Barazimi [2] do t'i eliminojë anëtarët që përmbajnë y.

$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Për të gjetur vlerën e y, e zëvendësojmë $x = 3$ në barazimin [1]:

$$15 + 2y = 11$$
$$2y = -4$$
$$y = -2$$

Zgjidhja e sistemit është $x = 3, y = -2$

Kontrollim: $(5 \cdot 3) + (2 \cdot (-2)) = 15 + (-4) = 11$ ✓ dhe $3 + (2 \cdot (-2)) = 3 + (-4) = -1$ ✓

Shembulli 2

Zgjidhe sistemin e barazimeve: $\begin{cases} 4x + 3y = 29 \\ 2x - 3y = -17 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 29 & [1] \\ 2x - 3y = -17 & [2] \end{cases}$$

Shuma Barazimi [1] + Barazimi [2] do t'i eliminojë anëtarët që përmbajnë y.

$$6x = 12$$
$$x = 2$$

Për të gjetur vlerën e y, e zëvendësojmë $x = 2$ në barazimin [1].

$$8 + 3y = 29$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Zgjidhja e sistemit është $x = 2, y = 7$.

Kontrollim: $(4 \cdot 2) + (3 \cdot 7) = 8 + 21 = 29$ ✓ dhe $(2 \cdot 2) - (3 \cdot 7) = 4 - 21 = -17$ ✓

Detyra

1. Zgjidhi sistemet e barazimeve

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x + 5y = 26 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$ **dh)** $\begin{cases} x + 7y = 18 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$ **ë)** $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ x - 7y = 6 \end{cases}$ **gj)** $\begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x - 5y = 19 \end{cases}$

2. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 3x + y = 19 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} 5x - 3y = -21 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$ **dh)** $\begin{cases} 6x - y = -16 \\ 5x + y = -6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 7x - 3y = 59 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ **ë)** $\begin{cases} 8x - 5y = -14 \\ 2x + 5y = -16 \end{cases}$

3. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x + y = -8 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 5x - 7y = -26 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} 3x - 5y = -11 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 4y = -3 \\ 3x - 4y = -13 \end{cases}$ **dh)** $\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 6x + y = 16 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 5y = 37 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **ë)** $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 7y = 16 \\ 2x - 3y = -24 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$ **gj)** $\begin{cases} 4x - 7y = -58 \\ 3x + 7y = 30 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 7x - 3y = -4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

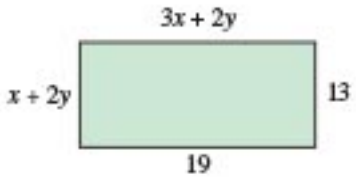
4. Shuma e dy numrave është 22, kurse ndryshimi i tyre është 9.

T'i shënojmë të dy numrat me x dhe y.

a) Shkruaji barazimet sipas x dhe y.

b) Zgjidhe sistemin e barazimeve.

5. Në vizatim është dhënë drejtkëndësh. Njehso vlera e x dhe y, sipas të dhënave në vizatim.



6. Mesi aritmetik i dy numrave është 44, ndryshimi i tyre është 17.

Cilët janë ata numra?

Ekzistojnë sisteme të barazimeve në të cilat **numrat para një ndryshoreje nuk janë të barabarta**. Në atë rast, duhet që njërën ose të dy barazimet në sistem ti shumëzojmë me numrin përkatës

Për t'i bërë koeficientët pranë njërës ndryshore të barabartë, kërkojmë ShVP të tyre. Pastaj i mbledhim ose i zbresim barazimet e fituara.

Shembulli 3

Zgjidhe sistemin e barazimeve: $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 & [1] \\ 3x - 4y = 28 & [2] \end{cases}$$

Që t'i bëjmë të barabartë koeficientët pranë ndryshores x, barazimin [1] e shumëzojmë me 3.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$$

Zbritja e dy barazimeve do t'i eliminojë anëtarët që përmbajnë ndryshoren x.

$10y = -10$ Dimë se $+6 - (-4) = 6 + 4$

$y = -1$

Që ta gjejmë vlerën e x, duhet ta zëvendësojmë $y = -1$ në barazimin [1].

$x - 2 = 6$

$x = 8$

Zgjidhja e sistemit është $x = 8, y = -1$.

Kontrollim: $8 + (2 \cdot (-1)) = 8 + (-2) = 6$ ✓ dhe $(3 \cdot 8) - (4 \cdot (-1)) = 24 - (-4) = 28$ ✓

Shembulli 4

Zgjidhe sistemin e barazimeve: $\begin{cases} 5x + 3y = 26 \\ 8x + 5y = 43 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 26 & [1] \\ 8x + 5y = 43 & [2] \end{cases}$$

Që të eliminojmë ndryshoren y, gjejmë ShVP (3,5) = 15 dhe kështu barazimin [1] do ta shumëzojmë me 5, kurse barazimin [2] me 3.

$$\begin{cases} 25x + 15y = 130 \\ 24x + 15y = 129 \end{cases}$$

Zbritja e të dy barazimeve do t'i eliminojë anëtarët me ndryshore y.

$$x = 1$$

Për të gjetur vlerën e y, zëvendësojmë $x = 1$ në barazimin [1].

$$5 + 3y = 26$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Zgjidhja është $x = 1, y = 7$.

Kontrollim: $(5 \cdot 1) + (3 \cdot 7) = 5 + 21 = 26$ ✓ dhe $(8 \cdot 1) + (5 \cdot 7) = 8 + 35 = 43$ ✓

Detyra

1. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 3y = 26 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x + 3y = 43 \\ 4x + 6y = 38 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$ **dh)** $\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 5y = 31 \\ x - 3y = 13 \end{cases}$ **ë)** $\begin{cases} 5x - y = -16 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x + 2y = 13 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **gj)** $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 5y = -8 \end{cases}$

2. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 38 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x + 3y = 32 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 24 \\ 5x - 7y = 51 \end{cases}$ **dh)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 27 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$ **ë)** $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 9x - 4y = -17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 7y = 38 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$ **gj)** $\begin{cases} 5x - 2y = 33 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 41 \end{cases}$

3. Nëse një numër e shumëzojmë me 3 dhe pastaj e mbledhim me numër tjetër të shumëzuar me 5, fitojmë rezultatin 2.

Shuma e atyre dy numrave është 2.

Përcaktoji këta numra.

4. Shtatë kanaçe lëng molle dhe pesë kanaçe limonadë kushtojnë 170 denarë.
Katër kanaçe lëng molle dhe tri kanaçe limonade kushtojnë 99 denarë.
Caktoje çmimin e një kanaçeje lëng molle.

5. Biletat për teatër kushtojnë 275 denarë për të rriturit dhe 160 denarë për fëmijë.
Një mbrëmje u shitën 342 bileta për 75995 denarë.
Sa bileta prej tyre ishin për fëmijë?

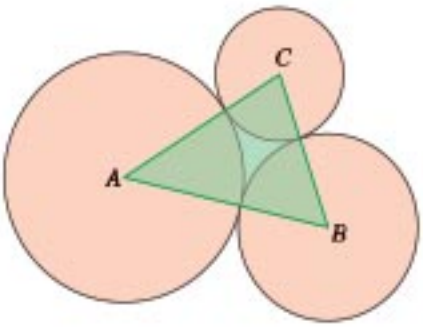
6. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x + 3 \\ 3y + x = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3y - 5x = 21 \\ 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$ **ç)** $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 9 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -2 \end{cases}$

7. Gjeje x dhe y ashtu që shprehjet të kenë vlera të barabarta.

$2x + y + 5$ $5x - 2y + 17$ $4x + 3y - 63$

8. A, B dhe C janë qendrat e tri vijave rrethore.
$\overline{AB} = 11$, $\overline{AC} = 10$ dhe $\overline{BC} = 8$
Njehso rrezet e tri vijave rrethore.



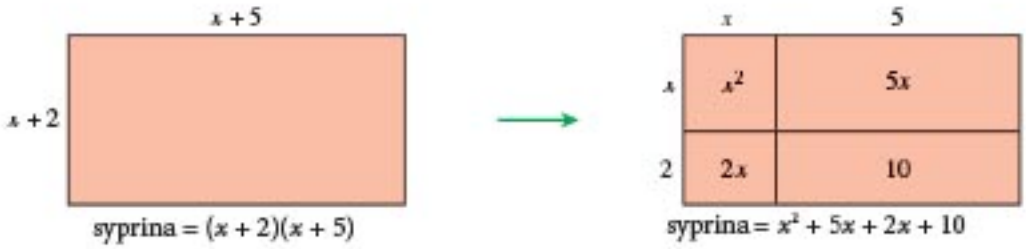
9. Zgjidhe sistemin e barazimeve.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

7.9 Shumëzimi i dy shprehjeve algjebrike

Shënimi $(x + 2)(x + 5)$ domethënë $(x + 2) \cdot (x + 5)$. Që t'i shumëzojmë shprehjet, duhet të lirohemi prej kllapave te të dy shprehjet.

Syprinën e drejtkëndëshit me brinjë me gjatësi $x + 2$ dhe $x + 5$ mund ta njehsojmë me ndarje të drejtkëndëshit në katër pjesë, siç është paraqitur në vizatim.



Sipas kësaj, kemi $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Tani do të lirohemi prej kllapave te shprehja $(x + 2)(x + 5)$ pa përdorur vizatimin.

Duhet t'i përcjellim këto hapa:

Hapi 1:

E shumëzojmë secilin anëtar të kllapës së dytë me x të kllapës së parë.

$(x+2)(x+5)$ $\quad x \cdot x = x^2$ dhe $x \cdot 5 = 5x$

Hapi 2:

E shumëzojmë secilin anëtar të kllapës së dytë me $(+2)$ të kllapës së parë.

$(x+2)(x+5)$ $\quad 2 \cdot x = 2x$ dhe $2 \cdot 5 = 10$

Hapi 3:

I kombinojmë rezultatet nga dy hapat e mëparshme.

Fitojmë $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Shembulli 1

Përdor vizatim për t'u liruar nga kllapat te shprehja: $(x+6)(x+11)$

	x	11
x	x^2	$11x$
6	$6x$	66

$(x+6)(x+11) = x^2 + 11x + 6x + 66$

$= x^2 + 17x + 66$

Shembulli 2

Shumëzoji shprehjet, kurse pastaj thjeshtoje shprehjen e fituar:

a) $(x+3)(x+4)$ **b)** $(x-7)(x+2)$ **c)** $(x-6)(x-7)$

a) $(x+3)(x+4)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+4) = +4x$ $\quad 3 \cdot (+x) = 3x$ $\quad +3 \cdot (+4) = +12$

$= x^2 + 4x + 3x + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

b) $(x-7)(x+2)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+2) = +2x$ $\quad -7 \cdot (+x) = -7x$ $\quad -7 \cdot (+2) = -14$

$= x^2 + 2x - 7x - 14$

$= x^2 - 5x - 14$

c) $(x-6)(x-7)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (-7) = -7x$ $\quad -6 \cdot x = -6x$ $\quad -6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 7x - 6x + 42$ Shumëzimi i dy numrave negativ: $-6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 13x + 42$

Detyra

1. Me ndihmë të vizatimit shumëzoji shprehjet:

a) $(x+1)(x+3)$ **b)** $(x+8)(x+2)$ **c)** $(x+5)(x+5)$ **ç)** $(x+6)(x+4)$

d) $(x+8)(x+1)$ **dh)** $(x+7)(x+9)$ **e)** $(x+4)(x+8)$ **ë)** $(x+2)(x+10)$

2. Liroju prej kllapave pa përdorimin e vizatimit.

a) $(x+2)(x+4)$ **b)** $(x+5)(x+1)$ **c)** $(x+4)(x+4)$ **ç)** $(x+7)(x+3)$

d) $(x+9)(x+8)$ **dh)** $(x+6)(x+2)$ **e)** $(x+7)(x+8)$ **ë)** $(x+11)(x+4)$

3. Liroju nga kllapat dhe thjeshto:

a) $(x+3)^2$ **b)** $(x+1)^2$ **c)** $(x+7)^2$

ç) $(x+2)^2$ **d)** $(x+9)^2$ **dh)** $(x+5)^2$

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$

4. Përmirësoji gabimet që ka bërë Anja kur është liruar nga kllapat në detyrat e shtëpisë.

a) $(x+3)(x-6) = x^2 - 6x + 3x - 3 = x^2 - 3x - 3$

b) $(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x - 20 = x^2 - 9x - 20$

c) $(x-6)^2 = x^2 + 36$

Në detyrat **5**, **6**, **7** dhe **8** liroju prej kllapave dhe thjeshto.

5. **a)** $(x-3)(x+4)$ **b)** $(x+5)(x-7)$ **c)** $(x-6)(x+8)$ **ç)** $(x+2)(x-9)$

d) $(x+3)(x-7)$ **dh)** $(x-6)(x+7)$ **e)** $(x+9)(x-1)$ **ë)** $(x+4)(x-5)$

f) $(x+4)(x-2)$ **g)** $(x-9)(x+8)$ **gj)** $(x+10)(x-2)$ **h)** $(x+5)(x-7)$

6. **a)** $(x-3)(x+3)$ **b)** $(x+5)(x-5)$ **c)** $(x-6)(x+6)$ **ç)** $(x+2)(x-2)$

d) $(x+4)(x-4)$ **dh)** $(x-1)(x+1)$ **e)** $(x+15)(x-15)$ **ë)** $(x+9)(x-9)$

7. **a)** $(x-5)(x-4)$ **b)** $(x-8)(x-7)$ **c)** $(x-6)(x-8)$ **ç)** $(x-2)(x-3)$

d) $(x-3)(x-7)$ **dh)** $(x-6)(x-9)$ **e)** $(x-11)(x-2)$ **ë)** $(x-8)(x-10)$

8. **a)** $(x-1)^2$ **b)** $(x-7)^2$ **c)** $(x-4)^2$ **ç)** $(x-13)^2$

9.

A	B	C	D	E
$x-3$	$x+1$	$x+3$	$x+2$	$x-1$

Cilat nga dy kartelat e dhëna janë shumëzuar që të fitohen shprehjet më poshtë

a) $x^2 - x - 6$ **b)** $x^2 + 4x + 3$ **c)** $x^2 + x - 2$

ç) $x^2 - 1$ **d)** $x^2 - 2x - 3$ **dh)** $x^2 + 5x + 6$

e) $x^2 + 2x - 3$ **ë)** $x^2 + 3x + 2$ **f)** $x^2 - 9$

10. Liroju prej kllapave dhe thjeshto:

a) $(x+4)(x+5) + (x+3)(x+9)$ **b)** $(x+7)(x+1) + (x+2)(x+5)$

c) $x(x+2) + (x+8)(x+1)$ **ç)** $(x+9)(x+2) - (x+4)(x+6)$

d) $(x+4)^2 + (x+3)^2$ **dh)** $(x+8)^2 - (x-3)^2$

11. Zgjidhi barazimet:

a) $x(x+8) = (x+3)(x+4)$ **b)** $(x+4)(x+2) = (x+3)(x+1)$

c) $(x+2)^2 = (x-3)^2$ **ç)** $(x+4)(x+2) = (x-3)(x-4)$

12. Trego se $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5$

13. Liroju prej kllapave dhe thjeshto:

a) $(2x+3)(x+5)$ **b)** $(3x+1)(x-7)$ **c)** $(x-6)(2x+4)$ **ç)** $(5x+3)(x-2)$

d) $(2x+1)(3x-5)$ **dh)** $(4x-3)(2x+1)$ **e)** $(8x+5)(3x-4)$ **ë)** $(5x-4)(x-5)$

f) $(3x-4)(x-2)$ **g)** $(7x-1)(3x-2)$ **gj)** $(5x+7)^2$ **h)** $(4x-3)^2$

14.

a) $\frac{2}{x} + \frac{5}{x+7}$ **b)** $\frac{2}{x+3} + \frac{5}{x+1}$ **c)** $\frac{4}{x-7} + \frac{3}{x+5}$ **ç)** $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x+4}$

7.10 Tentimet dhe gabimet

Disa barazime janë të vështira për t'i zgjidhur me ndihmë të transformimeve ekuivalente.

Barazimet e këtilla, tani për tani, i zgjidhim me metodën e quajtur **metoda e tentimeve dhe gabimeve**, e njohur edhe si metoda e orvatjeve dhe përmirësimeve.

Me këtë metodë fillimisht bëjmë vlerësim të zgjidhjes dhe pastaj përpiqemi ose tentojmë të përmirësojmë vlerësimin që bëmë më parë.

Shembulli 1

Me metodën e tentimeve dhe gabimeve zgjidhe barazimin $x^3 - 3x = 322$

Tentimi i parë: $x = 5$: $5^3 - 3 \cdot 5 = 125 - 15 = 110$ ➔ tejet i vogël

Tentimi i dytë: $x = 6$: $6^3 - 3 \cdot 6 = 216 - 18 = 198$ ➔ tejet i vogël

Tentimi i tretë: $x = 7$: $7^3 - 3 \cdot 7 = 343 - 21 = 322$ ➔ i saktë

Zgjidhja është $x = 7$

Në shembullin 1 arritëm të gjejmë rezultatin e saktë të barazimit të dhënë.

Mirëpo nganjëherë nuk është e mundur të gjejmë rezultatin e saktë, prandaj kërkojmë vetëm zgjidhje të përafërt.

Tërë mënyrën do ta tregojmë me tabelë.

Shembulli 2

Syprina e drejtkëndëshit të dhënë është 72 cm^2.

Me metodë të tentimeve dhe gabimeve gjeje vlerën e x të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.



Syprina e drejtkëndëshit = baza · lartësia përkatëse.

Prandaj, $x(x+5)=72 \Rightarrow x^2+5x=72$

Vlerësim	x^2+5x	Komentim	
6	$6^2+5\cdot 6=66$	Tejet e vogël	
7	$7^2+5\cdot 7=84$	Tejet e madhe	x shtrihet ndërmjet 6 dhe 7
6,3	$6{,}3^2+5\cdot 6{,}3=71{,}19$	Tejet e vogël	
6,4	$6{,}4^2+5\cdot 6{,}4=72{,}96$	Tejet e madhe	x shtrihet ndërmjet 6,3 dhe 6,4.
6,35	$6{,}35^2+5\cdot 6{,}35=72{,}0725$	Tejet e madhe	

Zgjidhja është ndërmjet $x=6{,}3$ dhe $x=6{,}35$

Prandaj, zgjidhja është x = 6,3
e rrumbullakuar në 1 v.dh.

Tentimi i fundit me $x=6{,}35$ është i nevojshëm që të kontrollojmë se zgjidhja a është më afër 6,3 se sa 6,4. Gjithnjë duhet të përdorim numër me një vend dhjetor më tepër se sa kërkohet në detyrë.

Detyra

Në zgjidhjen e detyrave vijuese përdor metodën e tentimeve dhe gabimeve.

1. Simoni e përdor metodën e tentimeve dhe gabimeve për të zgjidhur barazimin $x^3-5x=56$
Në tabelë janë paraqitur dy vlerësimet e para të tij.

Vlerësim	x^3-5x	Komentimi
4	$4^3-5\cdot 4=44$	Tejet e vogël
5	$5^3-5\cdot 5=100$	Tejet e madhe

Vazhdo me plotësim të tabelës që të zgjidhësh përafërsisht barazimin.

Zgjidhjen rrumbullakoje me 1 vend dhjetor.

2. Në këtë detyrë duhet të gjesh zgjidhjen e barazimit që gjendet në intervalin e dhënë.
Zgjidhjet rrumbullakoji në 1 vend dhjetor.

a) $x^2+5x=60$ nëse x shtrihet ndërmjet 5 dhe 6.

b) $x^2-2x=58$ nëse x shtrihet ndërmjet 8 dhe 9.

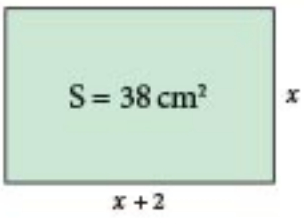
c) $x+\frac{10}{x}=8$ nëse x shtrihet ndërmjet 6 dhe 7.

3. Njehso zgjidhjet e barazimeve të rrumbullakuara në 1 vend dhjetor.

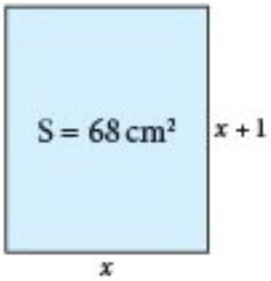
a) $x^3+x=4$ **b)** $x^3-2x=10$ **c)** $2x^3-7x=9$ **ç)** $2^x=20$

4. Shkruaj barazimin sipas x-it për të njehsuar syprinën e drejtkëndëshave të dhënë.
Zgjidhi barazimet dhe përcaktoje vlerën e x-it të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

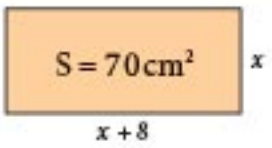
a)



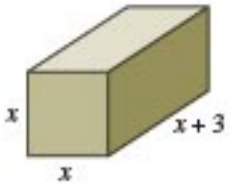
b)



c)



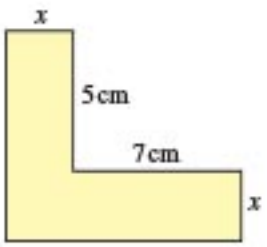
5. Kuadri i dhënë në vizatim ka vëllim 250 cm³.



a) Trego se $x^3 + 3x^2 = 250$

b) Njehsoje vlerën e x të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

6. Syprina e 2D-formës në vizatim është 40 cm².

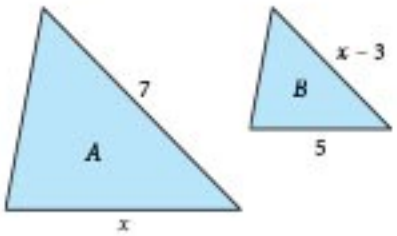


a) Trego se $x^2 + 12x = 40$

b) Njehsoje vlerën e x të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

Ndaje 2D-formën në dy drejtkëndësha

7. Trekëndëshi A është zmadhim i trekëndëshit B.

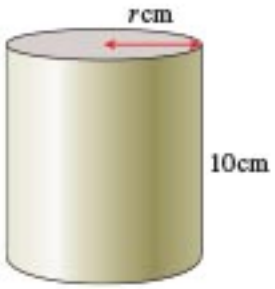


a) Shkruaj barazim sipas x dhe trego se ai barazim mund të thjeshtohet deri në formën $x^2 - 3x = 35$.

b) Njehsoje vlerën e x të rrumbullakuar deri në 1 vend dhjetor.

8. Syprina S e cilindrit me rreze r dhe lartësi h është $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Cilindri i dhënë ka syprinën 300 cm².



a) Trego se $\pi r^2 + 10\pi r = 150$

b) Njehsoje vlerën e r të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

7.11 Joabarazimet

Paraqitja e jobarazimeve në bosht numerik

Ekzistojnë katër shenja për jobarazime që duhet t'i dimë.

$a > 2$ domethënë "a është më i madh se 2" ose "2 është më i vogël se a"

$b \geq 5$ domethënë "b është më i madh ose i barabartë me 5" ose "5 është më i vogël ose i barabartë me b"

$c < 3$ domethënë "c është më i vogël se 3" ose "3 është më i madh se c"

$d \leq 4$ domethënë "d është më i vogël ose i barabartë me 4" ose "4 është më i madh ose i barabartë me d"

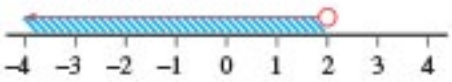
Jobarazimet kanë zbatim të madh në jetën e përditshme.

Shenja e komunikacionit për kufizim të shpejtësisë tregon se shpejtësia maksimale v km/h e automjeteve duhet të jetë më së shumti 100 km/h. Këtë mund ta shkruajmë në këtë mënyrë: $v \leq 100$.



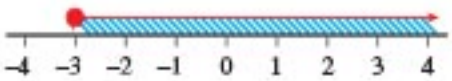
Jobarazimet shpesh i paraqesim në boshtin numerik.

$x < 2$ domethënë se x është më i vogël se 2. Në bosht numerik mund ta paraqesim në këtë mënyrë:



Për < ose > përdorim rreth të zbrazët.

$x \geq -3$ domethënë "x është më i madh ose i barabartë me -3" dhe këtë mund ta paraqesim në bosht numerik në këtë mënyrë:



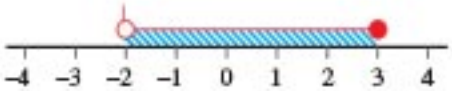
Për ≤ ose ≥ përdorim rreth të ngjyrosur.

$-2 < x \leq 3$ domethënë se x është më i madh se -2 dhe po ashtu është më i vogël ose i barabartë me 3.

Mënyrë më e lehtë është të themi:

x shtrihet ndërmjet -2 dhe 3. Ai nuk mund të jetë i barabartë me -2, por mund të jetë i barabartë me 3.

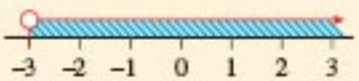
$-2 < x \leq 3$ mund ta paraqesim në këtë mënyrë:

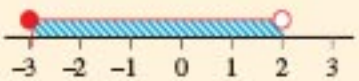


Shembulli 1

Shkruaji jobarazimet e paraqitura në boshte numerike:

a) 

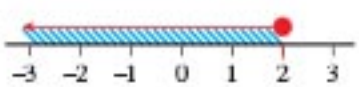
b) 

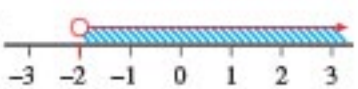
c) 

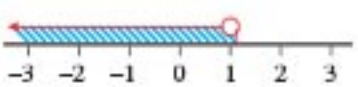
a) $x \leq 1$ **b)** $x > -3$ **c)** $-3 \leq x < 2$

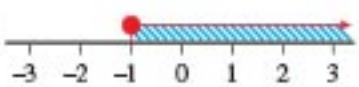
Detyra

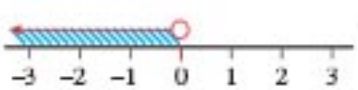
1. Shkruaji jobarazimet e paraqitura në boshte numerike.

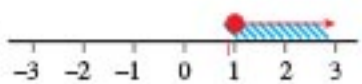
a) 

b) 

c) 

ç) 

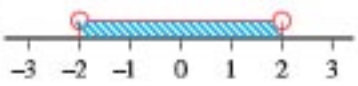
d) 

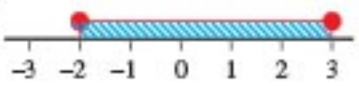
dh) 

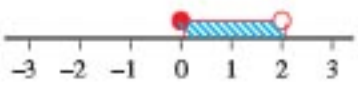
2. Paraqiti jobarazimet në bosht numerik.

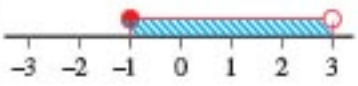
a) $x > 2$ **b)** $x < 4$ **c)** $x \geq -5$ **ç)** $x \leq 1$

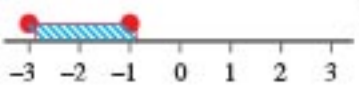
3. Shkruaji jobarazimet e paraqitura në boshte numerike.

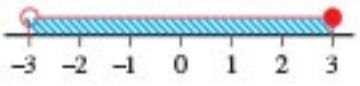
a)


b)


c)


ç)


d)


dh)


4. Paraqiti jobarazimet në bosht numerik.

a) $1 \le x < 4$ **b)** $-3 < x < 5$ **c)** $-4 < x \le 2$ **ç)** $3 \le x \le 5$

5. Le të jetë x numër i plotë dhe $-2 \le x < 4$
Cilat janë vlerat e mundshme të x.

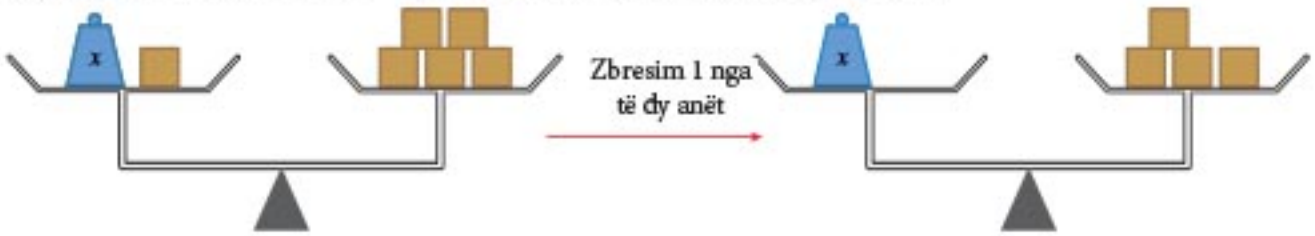
Numra të plotë janë numrat natyrorë, numrat e tyre të kundërt dhe numri zero.

6. **a)** Shkruaje numrin e plotë më të vogël të mundshëm për të cilin vlen: $-5 < x \le 3$

b) Shkruaje numrin e plotë më të madh të mundshëm për të cilin vlen $-5 < x \le 3$

Zgjidhja e jobarazimeve lineare

Zgjidhjen e barazimit $x + 1 = 5$ mund ta paraqesim sipas këtij vizatimi:



Nga rrjedh se zgjidhja është $x = 4$.

Ka vetëm një vlerë të x për të cilën është i saktë barazimi. Ai është numri 4.

Jobarazimin $x + 1 > 5$ mund ta paraqesim më vizatim të ngjashëm:



(Ana e majtë e peshores është më e rëndë se ana e djathtë e peshores.)

Sipas kësaj, zgjidhja është $x > 4$.

Ekzistojnë shumë vlera të x për të cilat jobarazimi është i saktë.

x mund të jetë cilido numër më i madh se 4.

Mënyra e zgjidhjes së jobarazimeve është shumë e ngjashme me mënyrën e zgjidhjes së barazimeve.

Kur zgjidhim jobarazime:

- mund të shtojmë vlera të njëjta në të dy anët
- mund të zbresim vlera të njëjta në të dy anët

- mund t'i shumëzojmë ose pjesëtojmë të dy anët me numër të njëjtë **pozitiv**
- kur jobarazimin e shumëzojmë ose pjesëtojmë me numër **negativ**, atëherë duhet të **ndërrojmë shenjën** e jobarazimit.

Rregullën e fundit do ta ilustrojmë me shembullin konkret:

Të shqyrtojmë pabarazimin: $-2 < 5$ • Shenja prej llojit < ndërrohet në llojin >.

Nëse i shumëzojmë të dy anët me (-3), do të fitojmë: $6 > -15$

Shembulli 2

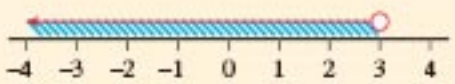
Zgjidhe jobarazimin $2(3x - 4) < 10$ dhe zgjidhjen e saj paraqite në boshtin numerik.

$2(3x - 4) < 10$ — Lirohemi prej kllapave.

$6x - 8 < 10$ — Shtojmë numrin 8 në të dy anët.

$6x < 18$ — Të dy anët i pjesëtojmë me 6.

$x < 3$



Shembulli 3

Zgjidhe jobarazimin $9 - 3x \leq 3$

Mënyra e parë

$9 - 3x \leq 3$ — Zbresim 9 në të dy anët.

$-3x \leq -6$ — Të dy anët i pjesëtojmë me -3.

$x \geq 2$ — Ndërrojmë shenjën e jobarazimit.

Mënyra e dytë

$9 - 3x \leq 3$ — Shtojmë shprehjen $3x$ në të dy anët.

$9 \leq 3 + 3x$ — Zbresim numrin 3 në të dy anët.

$6 \leq 3x$ — Të dy anët i pjesëtojmë me 2.

$2 \leq x$

Fituam $x \geq 2$

Detyra

1. Zgjidhi jobarazimet e dhëna.

a) $x + 7 \leq 11$ **b)** $x - 2 > 3$ **c)** $x + 10 < 4$ **ç)** $x - 5 > 4$

d) $x + 3 \geq -2$ **dh)** $2x > 8$ **e)** $3x \geq 21$ **ë)** $6x \leq 60$

f) $5x > -20$ **g)** $\frac{x}{3} < 5$ **gj)** $\frac{x}{2} \geq -8$ **h)** $\frac{x}{7} < 15$

i) $2x+1<9$ **j)** $4x+3\geq 15$ **k)** $3x-2>1$ **l)** $5x+2\leq 12$

ll) $2x+3>8$ **m)** $5x-2<3$ **n)** $4x+1\geq 7$ **nj)** $2x+9>6$

2. Zgjidhi jobarazimet e dhëna.

a) $7x+2>3x+22$ **b)** $6x-3\leq 5x+4$ **c)** $12x+5<8x+13$ **ç)** $3x-5\leq 2x+8$

d) $4x-5\geq 2x+7$ **dh)** $3x+8>x-2$ **e)** $6x+7<3x-5$ **ë)** $9x+10<7x-3$

f) $3x+2\leq 12-2x$ **g)** $2x+5>10-3x$ **gj)** $3-5x\leq 6-7x$ **h)** $6-2x>10-7x$

3. Zgjidhi jobarazimet e dhëna.

a) $-2x\geq 6$ **b)** $-3x<15$ **c)** $-6x>-24$ **ç)** $-4x\leq 6$

d) $10-2x>4$ **dh)** $15-4x\leq 3$ **e)** $14-3x<8$ **ë)** $2-5x\geq 7$

f) $6-x\geq 10$ **g)** $7-2x>3$ **gj)** $60-6x\leq 12$ **h)** $16\geq 8-4x$

4. Zgjidhi jobarazimet e dhëna.

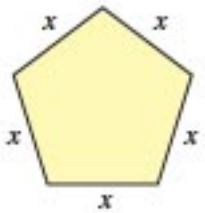
a) $x+7>3x+1$ **b)** $2x+14\leq 6x-2$ **c)** $6-9x<14-7x$

ç) $36-27x>15-20x$ **d)** $40-16x\geq 14+2x$ **dh)** $24-9x\leq 12-6x$

e) $7-5x>5-2x$ **ë)** $7-12x\geq 25-3x$ **f)** $1-x\leq 5x+7$

g) $6-3x\leq 13+x$ **gj)** $3-9x<2(3x-5)$ **h)** $5-2(x+3)>8+x$

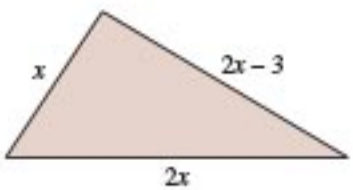
5. Perimetri i pesëkëndëshit të rregullt është më i vogël se 42 cm.
Formulo jobarazim me të cilin do të llogaritet x dhe zgjidhe.



6. Perimetri i drejtkëndëshit është më i madh se 36 cm.
Formulo jobarazim me të cilin do të llogaritet x sipas të dhënave në vizatim.



7. Perimetri i trekëndëshit nuk guxon të jetë më i madh se 45 cm.
Njehso vlerën maksimale që mund ta ketë x.



8. **a)** Shkruaje numrin e plotë më të vogël për të cilin është i saktë jobarazimi $3x>14$

b) Shkruaje numrin më të vogël për të cilin është i saktë jobarazimi $2x-5>16$

c) Shkruaje numrin e plotë më të madh për të cilin është i saktë jobarazimi $4x-15<6$

9. Zgjidhe jobarazimin $4<2x\leq 10$ dhe zgjidhjen paraqite në bosht numerik.

10. Zgjidhi jobarazimet e dhëna dhe pastaj caktoje numrin e numrave të plotë që janë zgjidhje e tyre.

a) $6\leq 2x\leq 8$ **b)** $-8<2x<6$ **c)** $3\leq 3x\leq 18$ **ç)** $2<\frac{x}{2}\leq 4$

d) $3<x+2<7$ **dh)** $2\leq x-4<5$ **e)** $-3\leq 2x+1\leq 7$ **ë)** $-5<3x-2\leq 7$

11. Zgjidhi jobarazimet

a) $x+1\leq \frac{x-1}{4}$ **b)** $\frac{x-2}{2}>\frac{x+3}{7}$ **c)** $\frac{x-5}{3}\leq \frac{5-x}{2}$ **ç)** $\frac{2x-3}{4}\geq \frac{3x-2}{5}$

12. Janë dhënë jobarazimet: $x + 3 \geq 7$ $2x - 3 < 20$

a) Zgjidhi jobarazimet e dhëna

b) Përcaktoje intervalin e vlerave të x për të cilën të dy jobarazimet janë të sakta.

13. Është dhënë jobarazimi $4x + 5y \leq 20$, ashtu që x dhe y janë numra të plotë pozitiv (pa zeron).

Cakto të gjitha çiftet e vlerave të mundshme të x dhe y për të cilat është i saktë jobarazimi.

Detyra për përsëritje

1. $y = \frac{3x^2 - 8}{x - 2}$

Njehsoje vlerën e y kur:

a) $x = 3$ **b)** $x = -2$

2. Formula $s = \frac{1}{2}(u + v)t$ përdoret në fizikë.

a) Njehsoje vlerën e s, nëse $u = 5$, $v = 7$ dhe $t = 4$.

b) Njehsoje vlerën e s, nëse $u = -4$, $v = 9$ dhe $t = 6$.

c) Njehsoje vlerën e t, nëse $s = 60$, $u = 13$ dhe $v = -3$.

ç) Caktoje vlerën e v, nëse $s = 45$, $u = -2$ dhe $t = 15$.

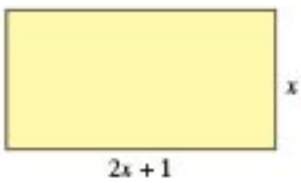
3. Një copë mango kushton x denarë, kurse një copë ananas kushton $(x + 1)$ denarë.

Shkruaj formulë për çmimin e përgjithshëm T në denarë që duhet të paguhet për 5 ananase dhe 10 mango.

4. Shkruaj formulë për:

a) syprinën S të drejtkëndëshit sipas të dhënave në vizatim.

b) perimetrin P të drejtkëndëshit sipas të dhënave në vizatim.



5. Shprehe x prej formulave të dhëna.

a) $y = x - 8$ **b)** $y - a = 3x$ **c)** $a(2x - 5) = c$ **ç)** $a - cx = b$

d) $h(f - 2x) = 3g^2$ **dh)** $\frac{x}{5p} = q$ **e)** $\frac{x}{2a + 3b} = 4c$ **ë)** $\frac{x + m}{n} = 5p$

f) $\frac{10}{x} = y$ **g)** $\frac{3x}{a} = \frac{4b}{c}$ **gj)** $\frac{y}{x - 5} = 2$ **h)** $2y = 5 - \frac{1}{x}$

i) $y = \frac{1}{5}x - 4$ **j)** $2 - x^2 = y$ **k)** $\frac{x^2}{3} - 1 = y$ **l)** $\sqrt{x - 4} = 2y$

6. Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzave që kalojnë nëpër pikat:

a) (2, 5) dhe (6, 7) **b)** (2, −3) dhe (−2, 6).

7. Vizatoje grafikun e drejtëzës $x - 3y = 6$.

8. Përcaktoje koeficientin e drejtimit për secilën drejtëz të dhënë.

a) $y = 2x + 9$ **b)** $y = 7 - 3x$ **c)** $3x + 6y = 12$ **ç)** $2y - 5x = 15$

9. Zgjidhe grafikisht sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 7y = -7 \end{cases}$$

10. w është në proporcion të drejtë me h.

$w = 8$ kur $h = 12$

Cakto w nëse $h = 15$.

11. Nëse $a = 5$ dhe $b = -2$, njehsoje vlerën e shprehjeve:

a) $a^2 + b^2$ **b)** $5a - 6b$ **c)** $\frac{4a}{b}$ **ç)** $2a^2 + b$

12. Liroju prej kllapave dhe thjeshto:

a) $(x + 7)(x + 2)$ **b)** $(x - 6)(x + 3)$ **c)** $(x + 1)(x - 2)$

ç) $(x - 5)(x - 9)$ **d)** $(x + 4)^2$ **dh)** $(x - 2)^2$

13. Zgjidhi sistemet e barazimeve.

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

14. Simona përdor metodën e tentimeve dhe gabimeve për të gjetur zgjidhjen e barazimit $2x - \frac{1}{x} = 9$

Ajo e di se zgjidhja shtrihet diku ndërmjet 4 dhe 5.

Tabela më poshtë tregon dy vlerësimet e saja të para.

Vlerësim	$2x - \frac{1}{x}$	Komentim
4	$(2 \cdot 4) - (1 : 4) = 7{,}75$	Tejet e vogël
5	$(2 \cdot 5) - (1 : 5) = 9{,}8$	Tejet e madhe

Vazhdo me plotësim të tabelës për të gjetur zgjidhjen e barazimit.

Zgjidhjen e fituar rrumbullakoje në 1 vend dhjetor.

15. Zgjidhi jobarazimet.

Për secilin jobarazim paraqite zgjidhjen në bosht numerik.

a) $2x \geq 8$ **b)** $x - 4 < 7$ **c)** $3x + 1 \geq 8$ **ç)** $3x + 5 \leq x - 8$

8 Gjeometria dhe zgjidhja e problemeve

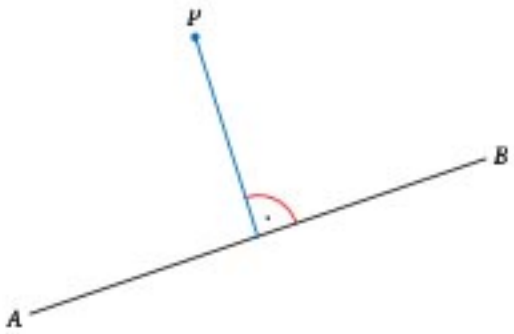
Qëllimet mësimore

- Përdor vizore dhe kompas:
  - për të konstruktuar normale prej pikës në drejtëz dhe normale prej pikës së drejtëzës;
  - për të brendashkruar katrorë, trekëndësha barabrinjës dhe gjashtëkëndësha të rregullt duke ndarë rrethin.
- Gjen vendin gjeometrik të pikave në largesë të caktuar prej pikës së dhënë ose prej drejtëzës së dhënë.
- Bën dhe përdor vizatime në raport dhe interpreton hartat.
- Njehson kënde të brendshme dhe të jashtme të çfarëdo shumëkëndëshi të rregullt; e vërteton dhe shfrytëzon formulën për shumën e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit; vërteton se shuma e këndeve të jashtme në shumëkëndësh është 360°.
- Zgjidh probleme duke përdorur vetitë e këndeve, drejtëzave paralele dhe drejtëzave që priten, të trekëndëshave, shumëkëndëshave të tjerë dhe rrethit, i shpjegon konkludimet e sjella dhe shpjegon të menduarit përmes diagrameve dhe fjalëve.
- Krijon shabllone prej trekëndëshave dhe katërkëndëshave të cilat përsëriten për mbulim të rrafshit, duke përdorur shumën e këndeve, rotacionit për 180° dhe translacionit; di cili shumëkëndësh i rregullt do të mbulojë rrafshin dhe shpjegon përse me tjerët nuk mund.
- Mat kënde në drejtim të akrepave të orës prej veriu për zgjidhje të problemeve në lidhje me drejtimin dhe kahun.
- E di dhe përdor teoremën e Pitagorës për të zgjidhur probleme në rrafsh, përfshirë trekëndësha kënddrejtë.
- Rrumbullakon numra deri në numër të caktuar të vendeve dhjetore; rrumbullakimin e përdor për të arritur në zgjidhje të problemit me shkallë të caktuar saktësie.

8.1 Konstruktimi i drejtëzave

Konstruktimi i normales së drejtëzës e cila kalon nëpër pikë të dhënë jashtë drejtëzës

Në vizatim është paraqitur drejtëza AB dhe pika P që nuk shtrihet në drejtëzën AB.



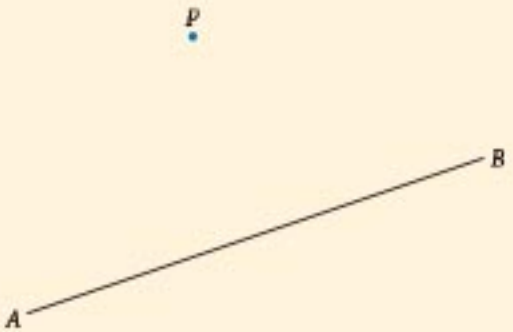
Nga pika P është tërhequr largësia më e shkurtër kah drejtëza AB. Në qoftë se e vazhdojmë segmentin e fituar nga të dy anët do të fitojmë drejtëz.

Drejtëza e fituar është **normale** e drejtëzës AB, respektivisht zë kënd të drejtë me drejtëzën AB.

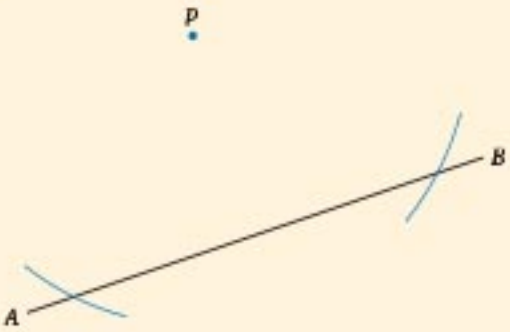
Në shembullin e mëposhtëm do të tregojmë si të konstruktojmë, vetëm me vizore dhe kompas, normale të drejtëzës nga pika e cila shtrihet jashtë drejtëzës.

Shembulli 1

Konstrukto drejtëz nëpër pikën P që është normale me drejtëzën AB.



Me kompas vizatojmë dy harqe të njëjta rrethore me qendër në P ashtu që harqet e presin AB në dy pika të ndryshme.

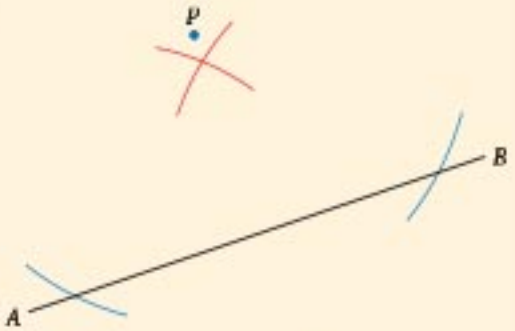


Pastaj duhet të konstruktojmë simetrale të segmentit të formuar prej pikave të fituara.

Vizatojmë nga një hark rrethor në dy anët e drejtëzës AB, me qendër në njërën prej atyre dy pikave.

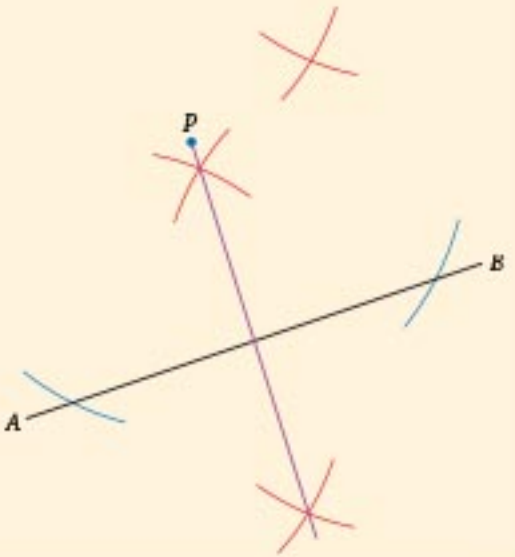
Procesin e përsërisim me qendër në pikën tjetër.

Gjatë tërë procesit të konstruktimit të katër harqeve të fundit nuk e ndryshojmë këndin ndërmjet krahëve të kompasit.



Nëpër pikëprerjet e harqeve me ndihmën e vizores tërheqim drejtëz siç është paraqitur në vizatim.

Kështu konstruktuam drejtëzën nëpër pikën P që është normal me drejtëzën AB.



Konstruktimi i normales së drejtëzës nëpër pikën e dhënë që shtrihet në drejtëz

Do të tregojmë si të konstruktojmë normale të drejtëzës nga pika që shtrihet në drejtëz.

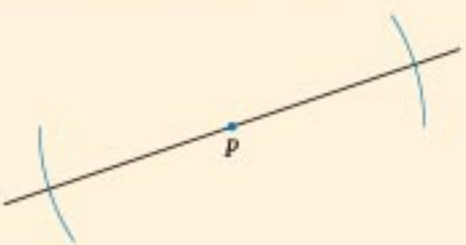
Në shembullin që vijon do t'i tregojmë hapat e konstruktimit.

Shembulli 2

Vizato drejtëz normale me drejtëzën e dhënë që kalon nëpër pikën P, e cila shtrihet në drejtëz.



Në fillim vizatojmë dy harqe rrethore me qendër në P, ashtu që ato e presin drejtëzën në dy pika të ndryshme të cilat janë në largësi të njëjtë prej P.

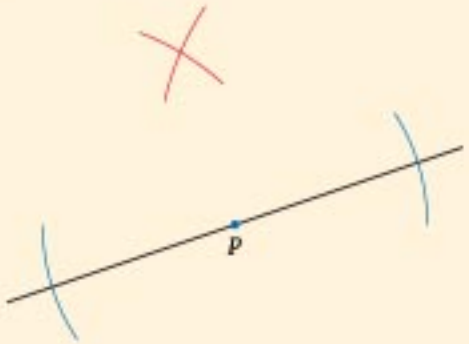


Pastaj, vizatojmë simetrale të segmentit të formuar nga këto dy pika.

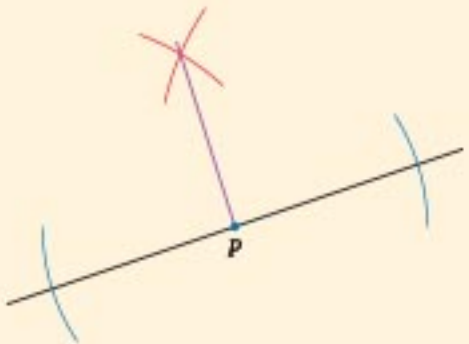
Vizatojmë hark rrethor në njërën anë të drejtëzës, me qendër në njërën prej dy pikave.

Vizatojmë hark rrethor në anën tjetër të drejtëzës, me qendër në pikën tjetër.

Njësoj sikur edhe në shembullin e mësipërm, gjatë tërë procesit të konstruktimit të dy harqeve të fundit nuk e ndryshojmë hapjen e kompasit, respektivisht nuk e ndryshojmë këndin mes krahëve të kompasit.



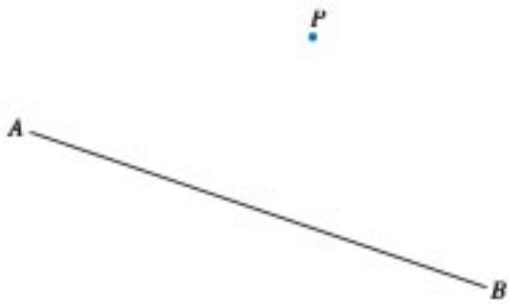
Prerjen e harqeve e bashkojmë me pikën P.



Kështu, konstruktuam drejtëzën e kërkuar.

Detyra

1. Kryeje vizatimin në fletoren tënde.



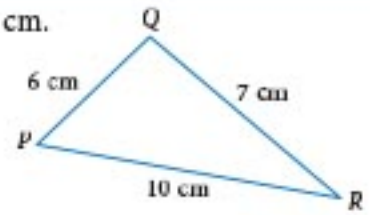
Konstrukto drejtëz nëpër P që është normale me drejtëzën AB.

2. Kryeje vizatimin në fletoren tënde.

Konstrukto drejtëz nëpër M e cila është normal me drejtëzën ST.



3. PQR është trekëndësh me brinjë: $\overline{PQ} = 6$ cm, $\overline{QR} = 7$ cm dhe $\overline{PR} = 10$ cm.



a) Konstrukto vizatim preciz të trekëndëshit.

b) Konstrukto drejtëz nëpër Q normale me $\overline{PR}$.

Shënoje me M pikën në të cilën drejtëza e fituar e pret $\overline{PR}$.

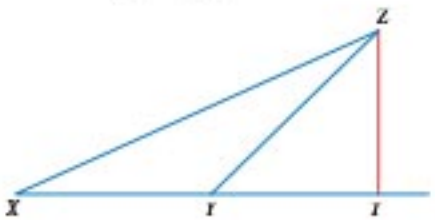
c) Mate gjatësinë e $\overline{QM}$.

ç) Përdore këtë gjatësi për të njehsuar syprinën e trekëndëshit PQR.

4. XYZ është trekëndësh. $\overline{XY} = 5$ cm, $\overline{YZ} = 7$ cm dhe $\overline{XZ} = 11$ cm.

a) Konstrukto vizatim preciz të trekëndëshit XYZ.

b) Vazhdoje brinjën e trekëndëshit përtej pikës Y.



Vizato normale nga pika Z deri në këtë drejtëz.

Shënoje me T pikën në të cilën normalja e pret drejtëzën.

c) Mate gjatësinë $\overline{ZT}$.

ç) Njehsoje syprinën e trekëndëshit XYZ.

5. **a)** Vizato segment të gjatë 10 cm.

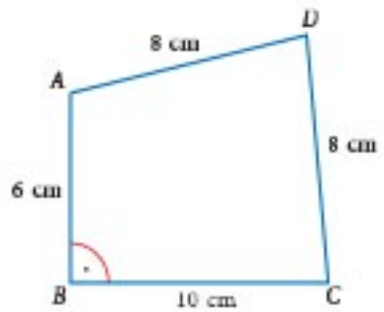
Shëno dy pika në segment, largesa mes të cilave është saktë 6 cm.

b) Me konstruktim të normaleve, vizato drejtkëndësh me gjatësi 6 cm dhe gjerësi 4 cm.

> Çdo kënd i brendshëm i drejtkëndëshit është 90°. Fillo me konstruktim të këndeve të drejta në të dy pikat që janë të larguara 6 cm.

c) Cakto gjatësinë e diagonales së drejtkëndëshit.

6. Konstrukto vizatim preciz të katërkëndëshit $ABCD$ të paraqitur më poshtë.



a) Vizato drejtëz dhe shëno pikat B dhe C, ashtu që largesa ndërmjet tyre është 10 cm.

b) Konstrukto drejtëz nëpër B që është normale me $\overline{BC}$.

Në atë drejtëz shëno pikë A në largësi 6 cm sipër drejtëzës.

> Që të konstruktosh kënd të drejtë, drejtëzën duhet ta vazhdosh në të majtë përtej pikës B.

c) Me kompas vizato hark me qendër në A dhe rreze 8 cm.

Me rrezen e njëjtë të kompasit, vizato hark tjetër me qendër në C.

Shëno pikë D në pikëprerjen e dy harqeve.

Vizato drejtëzat AD dhe CD.

ç) Cakto madhësinë e këndit ADC.

8.2 Konstruktimi i shumëkëndëshave të rregullt

Në këtë pjesë do të mësojmë si të **konstruktojmë** një **shumëkëndësh** të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore.

Të gjitha kulmet e shumëkëndëshit duhet të shtrihen në të njëjtën vijë rrethore.

Në shembujt vijues do të tregojmë mënyrat e konstruktimit të gjashtëkëndëshit të rregullt, trekëndëshit barabrinjës, katrorit dhe tetëkëndëshit të rregullt.

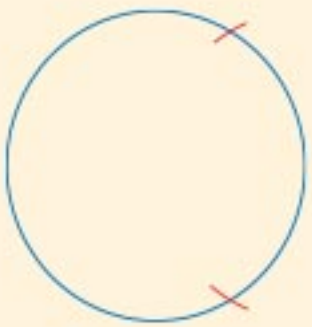
Shembulli 1

Konstrukto gjashtëkëndësh të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore me rreze 5 cm.

Fillimisht vizatojmë vijën rrethore me rreze 5 cm.

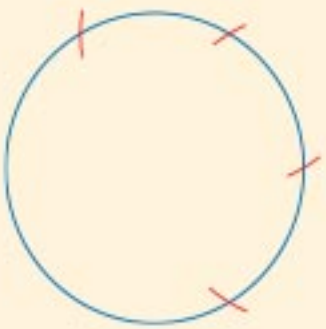
Gjatë tërë procedurës nuk do ta ndryshojmë këndin mes krahëve të kompasit.

Vendosim majën e kompasit në një pikë të vijës rrethore.

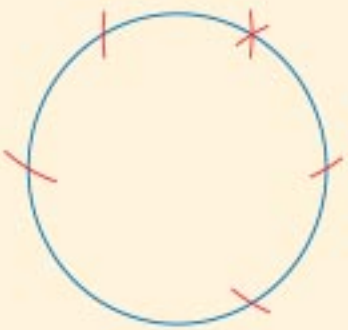


Vizatojmë dy harqe rrethore me qendër në atë pikë të vijës rrethore, ashtu që harqet e presin vijën rrethore në dy pika të ndryshme.

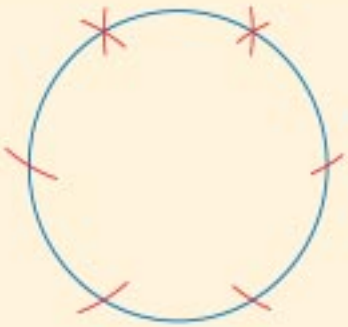
Vizatojmë dy harqe të reja rrethore me qendër në njërën pikë prerëse, ashtu që e presin vijën rrethore në dy pika të ndryshme.



Përsëri vizatojmë dy harqe rrethore me qendër në njërën pikë të re, ashtu që harqet e presin vijën rrethore në dy pika të ndryshme.

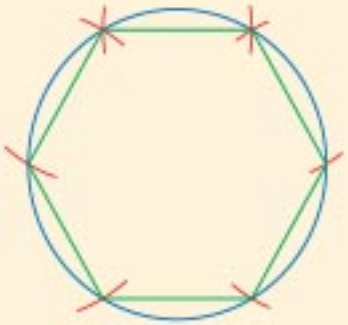


Procedurën e përsëritim për të gjitha pikat e reja derisa nuk shënojmë gjashtë pika të ndryshme në vijën rrethore.



Në fund i bashkojmë gjashtë pikat e fituara të vijës rrethore një pas një dhe formojmë gjashtëkëndëshin e rregullt.

Secila brinjë e saj është e barabartë me rrezen e vijës rrethore.



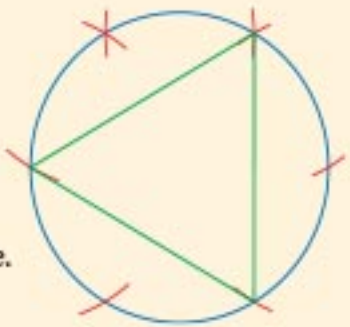
Shembulli 2

Konstrukto trekëndësh të rregullt (trekëndësh barabrinjës) të brendashkruar në vijë të dhënë rrethore.

I përsërisim të gjithë hapat për vizatim të gjashtëkëndëshit të rregullt (nga shembulli 1) deri në fitim të gjashtë pikave.

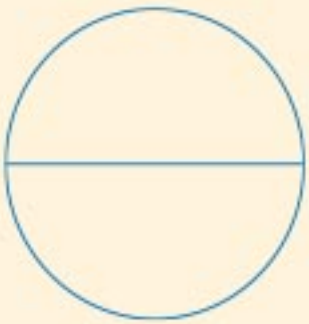
Në fund bashkojmë tri prej gjashtë pikave të fituara, gjatë së cilës duhet pasur kujdes cilat tri pika do t'i bashkojmë që të fitojmë trekëndësh barabrinjës.

Fituam trekëndësh barabrinjës të brendashkruar në vijë rrethore.



Shembulli 3

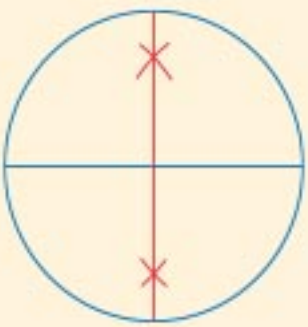
Konstrukto katror të brendashkruar në vijë rrethore me diametër 10 cm.



Në fillim vizatojmë vijën rrethore me rrezen e saktë.

Vizatojmë diametër të vijës rrethore.

Konstruktojmë simetralen e diametrit me ndihmën e harqeve mbi dhe nën diametrin.



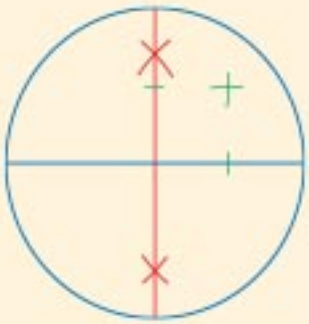
I bashkojmë katër pikat në të cilat diametri dhe simetralja e presin vijën rrethore.

Konstruktuam katror të brendashkruar në vijë rrethore.



Shembulli 4

Konstrukto tetëkëndësh të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore me diametër 10 cm.



I përcjellim tre hapat e parë për konstruktim të katrorit (nga shembulli 3).

Fituam dy segmente reciprokisht normale (diametri dhe simetralja e saj) që priten në qendrën e vijës rrethore.

Konstruktojmë simetralen e njërit prej këndeve të drejta. Vizatojmë harqe rrethore me qendër në qendrën e vijës rrethore, ashtu që i presin krahët e këndit të drejtë në dy pika. Nga secila prej pikave tërheqim nga një hark rrethor, ashtu që të dy harqet rrethore priten në një pikë.

Tërheqim drejtëz nëpër pikëprerjen e atyre dy harqeve dhe qendrës së vijës rrethore e cila duhet ta presë vijën rrethore.



Pastaj konstruktojmë simetrale të dy këndeve të tjera të drejta e cila duhet ta presë vijën rrethore.

Fitojmë vizatimin sikur ai i dhëni.

I bashkojmë me segmente tetë pikat e fituara të vijës rrethore dhe fitojmë tetëkëndëshin e rregullt.



Detyra

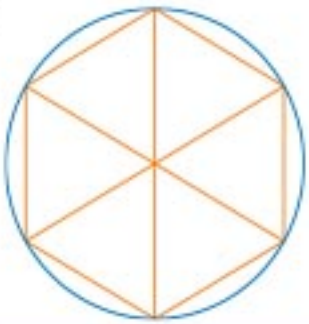
1. Vizato vijë rrethore me rreze 6 cm.
   a) Konstrukto katror të brendashkruar në vijën e dhënë rrethore.
   b) Cakto gjatësinë e diagonales së katrorit.
   c) Cakto gjatësinë e brinjës së katrorit.
2. Vizato vijë rrethore me rreze 6 cm.
   a) Konstrukto trekëndësh barabrinjës të brendashkruar në vijën rrethore.

b) Cakto gjatësinë e brinjës së trekëndëshit.

c) Njehsoje syprinën e trekëndëshit.

3. Brendashkruaji këto forma të dhëna në vijë rrethore me rreze 5 cm.

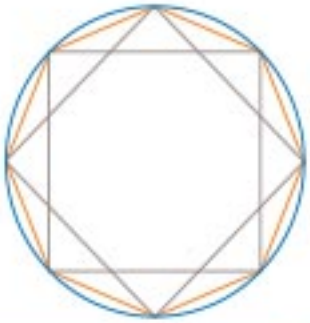
a)



b)



c)



Në detyrat 4 dhe 5 vizato vija rrethore me rreze më së paku 5 cm. Kështu lehtë do të mundesh t'i vizatosh simetralet.

4. Konstrukto gjashtëkëndësh të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore.

Konstrukto simetralen e secilës brinjë të saj.

Përdori këto simetrale për të konstruktuar dymbëdhjetëkëndëshin e rregullt të brendashkruar në vijën rrethore.

5. Konstrukto tetëkëndësh të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore.

Përdore tetëkëndëshin për të konstruktuar gjashtëmbëdhjetëkëndëshin e rregullt të brendashkruar në vijën rrethore.

8.3 Vendi gjeometrik i pikave

Vend gjeometrik i pikave (VGjP) është bashkësi e pikave të cilat plotësojnë veti të dhënë.

VGjP mund të jetë vijë ose zonë.

Shembulli 1

Gjeje vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 3 cm nga pika X.



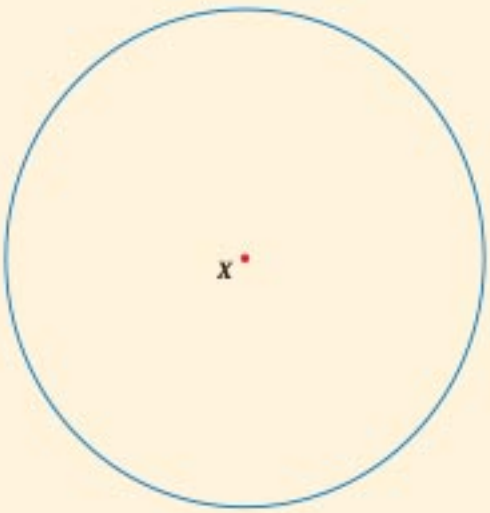
Me ndihmën e vizores është e mundshme të gjejmë më shumë pika që janë në largësi 3 cm prej X.

Në vizatimin janë paraqitur disa nga këto pika me ngjyrë të kaltër.



Megjithatë, ekzistojnë shumë pika që plotësojnë këtë veti.

E qartë se të gjitha këto pika shtrihen në vijën rrethore me rreze 3 cm.



Kjo vijë rrethore paraqet vendin gjeometrik të pikave të cilat janë në largësi 3 cm prej X.

Shembulli 2

$\overline{PQ}$ është segment i gjatë 7 cm.



Vizato vend gjeometrik të pikave të cilat janë në largësi saktë 2,5 cm prej segmentit $\overline{PQ}$.

Në njërën anë të $\overline{PQ}$ vizatojmë segment paralele me $\overline{PQ}$, i cili është në largësi 2,5 cm prej tij



Gjitha pikat nga segmenti i ri janë në largësi 2,5 cm prej $\overline{PQ}$, prandaj ky segment është pjesë prej vendit gjeometrik të pikave të kërkuara

Në anën tjetër të $\overline{PQ}$ mund të vizatojmë segment tjetër.

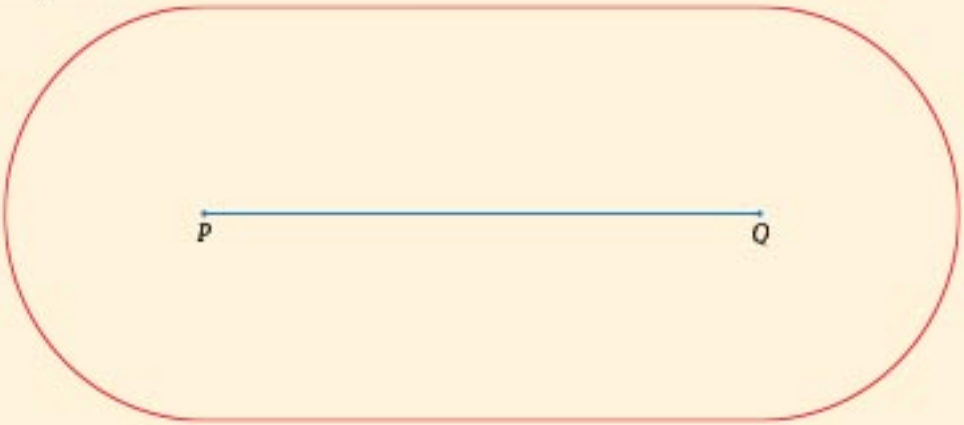


Në anën e majtë të segmentit $\overline{PQ}$, Vendi gjeometrik i pikave do të përbëhet prej gjitha pikave të cilat janë të larguara 2,5 cm prej pikës P.

Ai është gjysmëqarku me qendër P dhe rreze 2,5 cm.

Ngjashëm, në skajin tjetër të segmentit $\overline{PQ}$, te pika Q, ka gjysmëqark tjetër.

Në vizatimin është paraqitur vendi gjeometrik i pikave të kërkuara në tërësi.



Detyra



1. Një merimangë gjendet në skajin e një akrepi të orës.

   Akrepi është i gjatë 4,8 centimetra.

   Vizato vendin gjeometrik të pikave nëpër të cilat kalon merimanga përderisa punon ora.

2. Një fotografi është varur në mur të një galerie.

   Është dhënë perspektivë nga sipër e murit me fotografinë.



   Vizitorëve në galeri nuk iu është mundësuar qasje më afër se 2 metra nga fotografia.

   Galeria vendosi të bëjë një gardh të vogël për t'i mbajtur njerëzit më larg fotografisë.

   Vizato vizatim për të paraqitur vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 2 metra prej fotografisë.

3. Shëno pikë A në fletore.

   Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë në largësi prej 3,5 cm nga pika A.

4. Në fletore vizato segment të gjatë 4,5 cm.

   Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara saktë 3 cm nga segmenti.

5. Vizato dy pika larg njëra tjetrës 6 centimetra.
Emërtoi pikat me A dhe B.

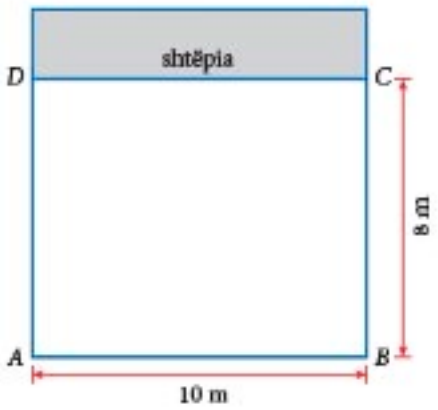
VGjP që janë në largësi të njëjtë prej një pike është vija rrethore.

a) Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 4 cm nga A.

b) Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 4 cm nga B.

c) Sa pika janë të larguara 4 cm prej të dy pikave *A* dhe *B*.
Shënoji ato pika në vizatim.

6. Është dhënë plan për një kopsht në formë drejtkëndëshi *ABCD*.
Dimensionet e kopshtit janë 10 metra dhe 8 metra.
Pronari dëshiron të mbjellë pemë në të.
Ai urdhëron pema të jetë saktë 5 metra prej shtëpisë.
Pema, po ashtu, duhet të jetë saktë 4 metra prej këndit në A.



a) Vizato planin e kopshtit. Përdore raportin 1 cm i përgjigjet 1 m.

b) Në vizatim vizato vend gjeometrik të pikave të cilat janë në distancë 5 metra nga shtëpia.

c) Në vizatim vizato vend gjeometrik të pikave të cilat janë në distancë 4 metra prej A.

ç) Shëno pozitën e pemës me shkronjën *X*.

X do të jetë pika ku priten të dy vendet gjeometrike të pikave.

d) Mate distancën $\overline{BX}$.

7. Vizato katror me brinjë 5 cm.
Vizato vendin gjeometrik të pikave jashtë katrorit që është e larguar saktë 3 cm prej brinjëve të katrorit.

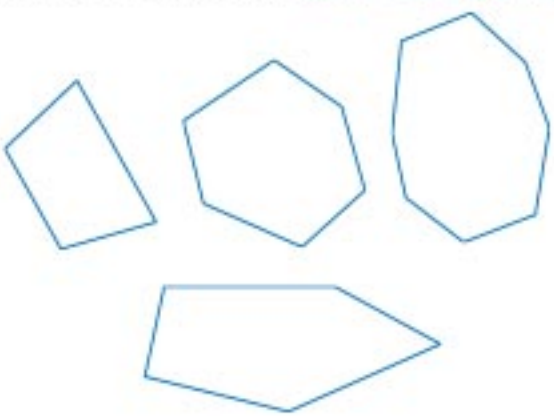
Për secilin kulm ekzistojnë më tepër pika të cilat janë në distancë 3 cm prej kulmit. Ato pika formojnë lakore.

8.4 Këndet e shumëkëndëshit

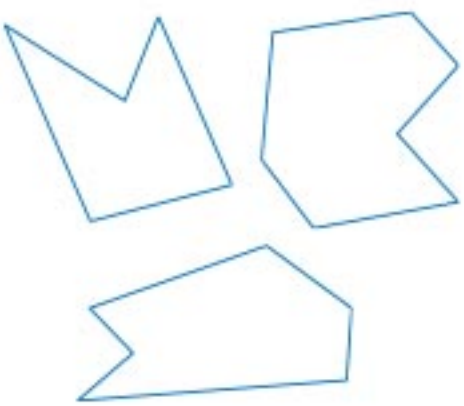
Këndet e brendshme

Shumëkëndësh është 2D-formë me brinjë të drejta.

Shumëkëndëshat mund të jenë **konveks** dhe **jokonveks**.



shumëkëndësha konveks



shumëkëndësha jokonveks

Shumëkëndëshat jokonveks kanë një **kulm** të tërhequr në brendësi të shumëkëndëshit.

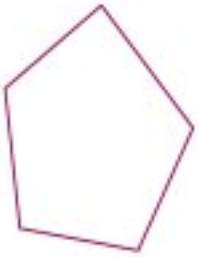
Ja disa shembuj të shumëkëndëshave.



trekëndësh
3 brinjë



katërkëndësh
4 brinjë



pesëkëndësh
5 brinjë



gjashtëkëndësh
6 brinjë



shtatëkëndësh
7 brinjë



tetëkëndësh
8 brinjë



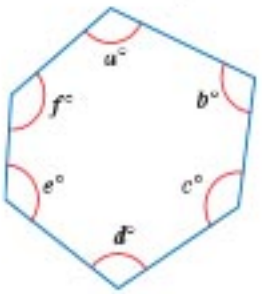
nëntëkëndësh
9 brinjë



dhjetëkëndësh
10 brinjë

Kënde të brendshme të shumëkëndëshit janë këndet pranë kulmeve përbrenda 2D-formës..

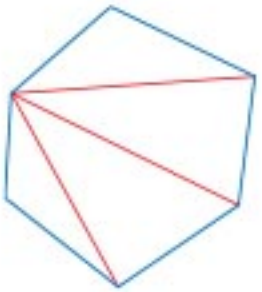
Këndet e brendshme të këtij gjashtëkëndëshi janë $a°$, $b°$, $c°$, $d°$, $e°$ dhe $f°$.



Me tërheqjen e të gjitha **diagonaleve** nga një kulm, gjashtëkëndëshin mund ta ndajmë në katër trekëndësha.

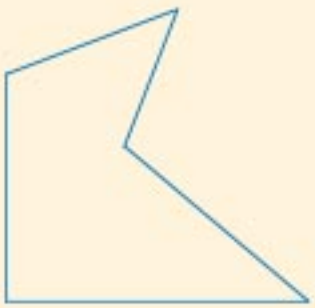
Shuma e këndeve të brendshme të secilit trekëndësh është 180°.

Shuma e këndeve të brendshme të gjashtëkëndëshit është $4 \cdot 180° = 720°$

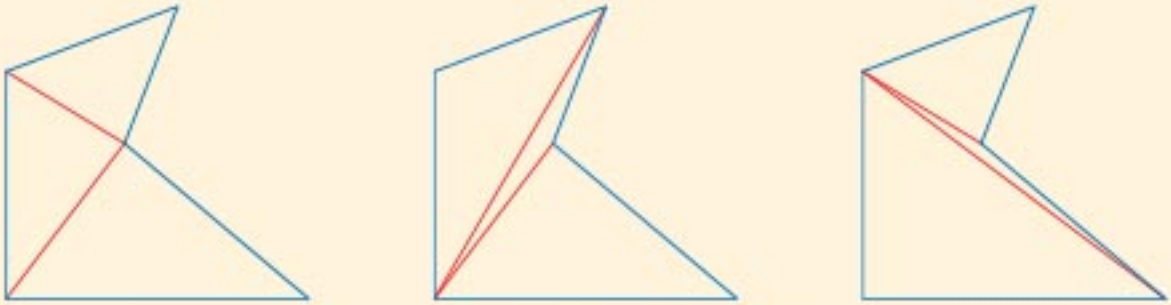


Shembulli 1

Më vizatimin e diagonaleve njehso shumën e këndeve të brendshme të pesëkëndëshit të dhënë.



Ekzistojnë disa mënyra për të vizatuar diagonalet dhe të ndajmë pesëkëndëshin në trekëndësha.



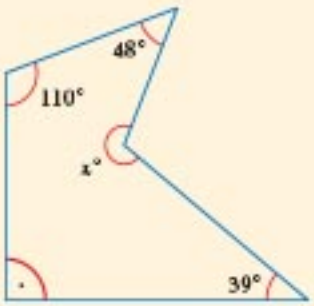
Pa dallim se në cilën mënyrë t'i vizatojmë diagonalet, gjithnjë ekzistojnë tre trekëndësha.

Domethënë, $3 \cdot 180° = 540°$

Shuma e këndeve të brendshme në pesëkëndësh është 540°.

Shembulli 2

Përdore rezultatin nga shembulli i mësipërm për të njehsuar këndin e panjohur në pesëkëndëshin e dhënë.



Shuma e katër këndeve të dhëna është $48° + 110° + 90° + 39° = 287°$

Shuma e këndeve të brendshme në pesëkëndësh është 540°.

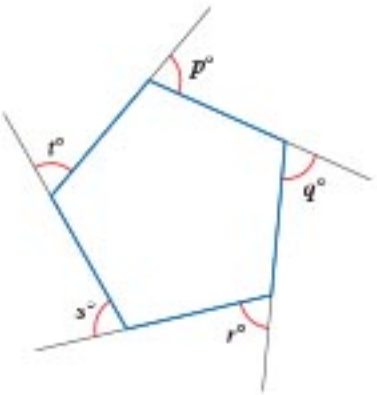
Këndi i panjohur është $540° - 287° = 253°$

Të kontrollojmë nëse këndi është më i madh se 180° dhe më i vogël se 270°. Zgjidhja e fituar 253° është e saktë.

Këndet e jashtme

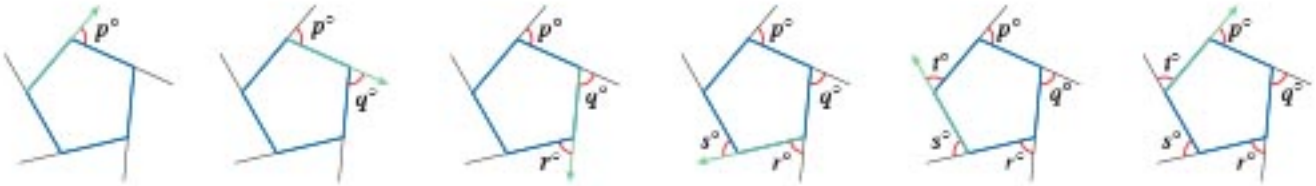
Këndet e jashtme të shumëkëndëshit konveks formohen me vazhdim të brinjëve në secilin kulm.

Këndet e jashtme të pesëkëndëshit janë paraqitur në vizatimin djathtë.



Në secilin kulm këndi i brendshëm dhe i jashtëm shtrihen në një drejtëz.

Në secilin kulm: **kënd i brendshëm + kënd i jashtëm = 180°**



Të paramendojmë një shigjetë përgjatë gjatësisë së një brinje të pesëkëndëshit.

Shigjeta kryen rotacion për këndin $p°$ në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës dhe shigjeta përputhet me brinjën fqinje të pesëkëndëshit.

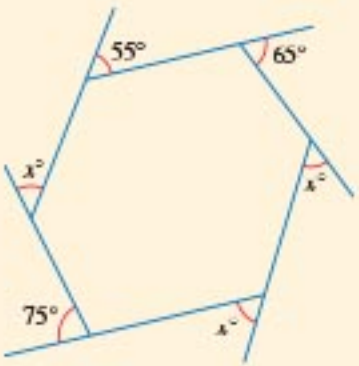
Pastaj rrotullohet për këndin $q°$, pastaj për $r°$, pastaj për $s°$ dhe në fund për $t°$.

Rrotullimi gjatë tërë kohës është në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës. Në fund, shigjeta përsëri kthehet aty prej ku filloi. Shigjeta bëri rrotullimin prej 360°.

Treguam se **shuma e këndeve të jashtme të shumëkëndëshit konveks është 360°.**

Shembulli 3

Njehsoje madhësinë e këndeve të shënuara në vizatim me $x°$.



Shuma e këndeve të jashtme është 360°.

$$55 + 65 + x° + x° + 75 + x° = 360$$
$$195 + 3x° = 360$$
$$3x° = 165$$
$$x° = 55°$$

Detyra

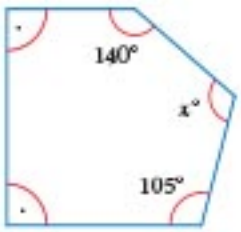
1. **a)** Vizato tetëkëndësh.
   b) Vizato diagonale për të ndarë tetëkëndëshin në trekëndësha.
   c) Sa trekëndësha të tillë ekzistojnë?
   ç) Njehso shumën e këndeve të brendshme të tetëkëndëshit.
2. Vizatoje tabelën në fletore.

Numri i brinjëve	Emri i shumëkëndëshit	Numri i trekëndëshave	Shuma e këndeve të brendshme
3	trekëndësh	1	180°
4			
5			
6	gjashtëkëndësh	4	720°
7			
8			
9			
10			
12	dymbëdhjetëkëndësh		

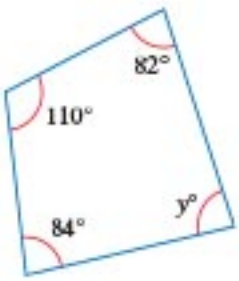
   a) Shkruaj emrat e shumëkëndëshave. Disa emra tanimë janë shkruar.
   b) Vizato vizatim për secilin shumëkëndësh dhe ndaji ato në trekëndësha. Shkruaje numrin e trekëndëshave në tabelë.
   c) Njehsoje shumën e këndeve të brendshme dhe plotësoje kolonën e fundit.

3. Përdori zgjidhjet e detyrës paraprake për t'i gjetur këndet e panjohura në shumëkëndëshat e dhënë.

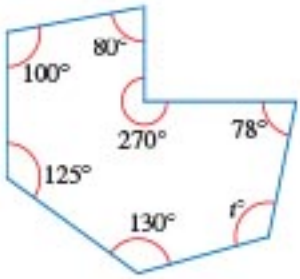
a)



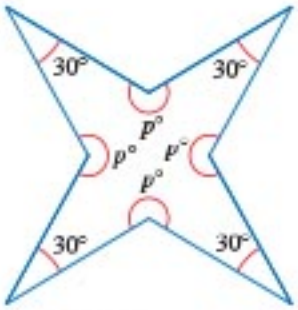
b)



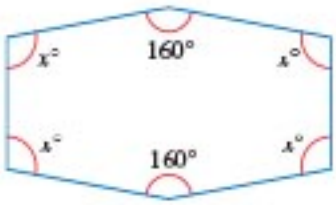
c)



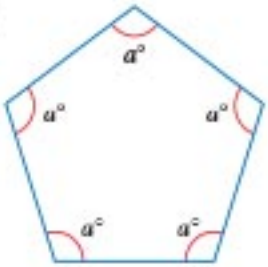
ç)



d)

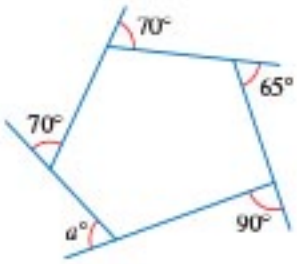


dh)

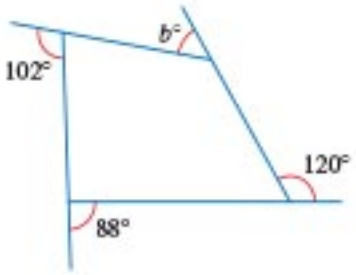


4. Njehsoji këndet e panjohura të shumëkëndëshave.

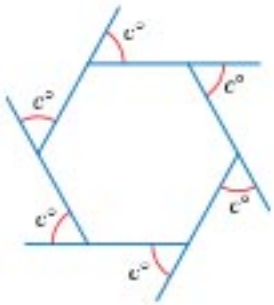
a)



b)



c)



5. Janë dhënë katër pohime për shumëkëndëshat jokonveks.

Cakto cilat prej tyre janë të sakta dhe cilat të pasakta.

Vizato vizatime për t'i shpjeguar përgjigjet e tua.

a) Shumëkëndëshat jokonveks kanë së paku një kënd të brendshëm më të madh se 180°.

b) Shumëkëndëshat jokonveks nuk mund të ndahen në trekëndësha.

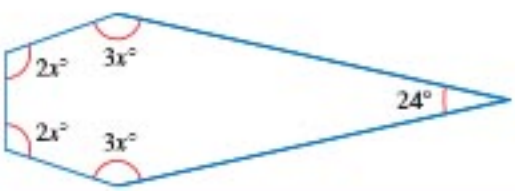
c) E pamundur është të vizatohet trekëndësh jokonveks.

ç) E pamundur është të vizatohet katërkëndësh jokonveks.

Duhet të bësh disa skica që të provosh se ato shumëkëndësha a mund të konstruktohen.

6. Në vizatimin është dhënë pesëkëndësh konveks.

Njehsoje vlerën e x.



Përpilo barazim duke përdorur këndet e dhëna dhe shumën e këndeve në pesëkëndësh.

Shumëkëndëshat e rregullt

Të gjitha brinjët e **shumëkëndëshit të rregullt** janë të barabarta mes veti.

Të gjitha këndet e shumëkëndëshit të rregullt janë të barabarta mes veti.

Shuma e këndeve të brendshme

Nëse shumëkëndëshi ka n brinjë, ai përmes diagonaleve prej një kulmi mund të ndahet në $n - 2$ trekëndësha.

Shuma e këndeve të brendshme është $(n - 2) \cdot 180°$ ose $180°(n - 2)$.

Prej këtu fitojmë formulën e përgjithshme:

shuma e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit me n brinjë është $180°(n - 2)$

Shuma e këndeve të jashtme

Shumëkëndëshi ka n brinjë.

Në secilin kulm këndi i brendshëm + këndi i jashtëm = 180°

Ka n kulme, prandaj shuma e të gjitha këndeve të brendshme + këndeve të jashtme = $180° \cdot n$ ose $180°n$.

Por, shuma e këndeve të brendshme është $180°(n - 2)$.

Prandaj, shuma e këndeve të jashtme = $180°n - 180°(n - 2)$

$= 180°n - 180°n + 360°$

$= 360°$

Treguam se shuma e këndeve të jashtme te shumëkëndëshi është 360°.

Shembulli 4

Njehso shumën e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit me 20 brinjë.

Zëvendësojmë $n = 20$ në formulën $180°(n - 2)$.

$180 \cdot (20 - 2) = 180 \cdot 18$

$= 3240$

Shuma e këndeve të brendshme te ky shumëkëndësh është 3240°.

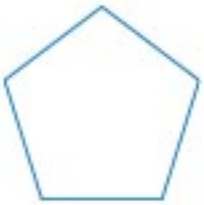
Në vizatim janë dhënë disa shumëkëndësha të rregullt.



trekëndësh barabrinjës



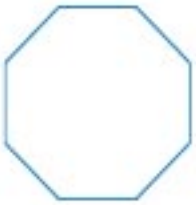
katror



pesëkëndësh i rregullt



gjashtëkëndësh i rregullt



tetëkëndësh i rregullt

Këndi i jashtëm

Shuma e këndeve të jashtme të shumëkëndëshit të rregullt është 360°.

Të gjitha këndet e jashtme janë të barabarta.

Çdo kënd i jashtëm = 360°: me numrin e brinjëve të shumëkëndëshit.

$$\textbf{këndi i jashtëm i shumëkëndëshit të rregullt me } n \textbf{ brinjë} = \frac{360^\circ}{n}$$

Këndi i brendshëm

Ekzistojnë dy mënyra për caktimin e këndit të brendshëm te shumëkëndëshi i rregullt.

1 Me ndihmën e formulës për shumën e këndeve të brendshme.

Shuma e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit me n brinjë është $180^\circ(n-2)$

Të gjitha këndet e brendshme janë të barabarta.

$$\textbf{këndi i jashtëm i shumëkëndëshit të rregullt me } n \textbf{ brinjë} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

2 Me ndihmën e këndeve të jashtme.

Çdo kënd i jashtëm $= \frac{360^\circ}{n}$

Shuma e këndit të brendshëm dhe të jashtëm në secilin kulm është 180°.

$$\textbf{këndi i brendshëm i shumëkëndëshit të rregullt me } n \textbf{ brinjë} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Shembulli 5

Një shumëkëndësh i rregullt ka 15 brinjë.

a) Njehsoje këndin e brendshëm.

b) Njehsoje këndin e jashtëm.

c) Kontrollo vallë shuma e tyre është 180°.

a) Zëvendësojmë $n = 15$ në $\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$

$$= \frac{180 \cdot (15-2)}{15}$$
$$= \frac{180 \cdot 13}{15}$$
$$= \frac{2340}{15}$$
$$= 156$$

Secili kënd i brendshëm është 156°.

b) Zëvendësojmë $n = 15$ në $\frac{360}{n}$

$$= \frac{360}{15}$$
$$= 24$$

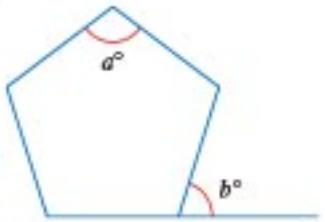
Secili kënd i jashtëm është 24°.

c) Kontrollim: $156^\circ + 24^\circ = 180^\circ$ ✓

Detyra

1. Në vizatimet janë dhënë shumëkëndësha të rregullt. Njehsoji këndet e shënuara me shkronja.

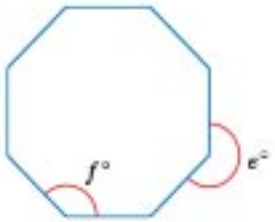
a)



b)



c)



2. Njehso: **i** kënd të brendshëm dhe **ii** kënd të jashtëm të shumëkëndëshit të rregullt me:

a) 9 brinjë

b) 12 brinjë

c) 20 brinjë

ç) 7 brinjë.

3. Përshkruaje dhe plotësoje tabelën për shumëkëndësha të rregullt. Disa kënde tanimë janë shënuar.

Numri i brinjëve	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Kënd i jashtëm	120°									24°	
Kënd i brendshëm										156°	

4. Shfrytëzoje tabelën nga detyra 3 për t'u përgjigjur pyetjeve:

a) Çfarë ndodh me këndin e jashtëm kur zmadhohet numri i brinjëve të shumëkëndëshit?

b) Çfarë ndodh me këndin e brendshëm kur zmadhohet numri i brinjëve të shumëkëndëshit?

c) Njehsoje këndin e brendshëm të shumëkëndëshit të rregullt me 100 brinjë që të gjykosh saktë për përgjigjen tënde nën **b)**

5. Në vizatimet e dhëna është paraqitur kulm i shumëkëndëshit të rregullt.

Njehso sa brinjë ka secili prej tyre.

a)



b)



Në fillim njehsoje këndin e jashtëm.

6. Ka dy formula për njehsim të këndit të brendshëm të shumëkëndëshit të rregullt.

Njëra është $x° = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Liroju prej kllapave dhe thjeshto formulën.

Trego se ajo është ekuivalente me formulën $x° = 180° - \frac{360°}{n}$.

Pas lirimit nga kllapat shprehjen shkruaje me dy thyesa.

Këndet dhe drejtëzat

Kur dy drejtëza priten, formohen katër kënde.

Ato kënde dy nga dy janë të barabarta mes tyre.

Ato i quajmë kënde të **kryqëzuara**.

Në vizatim janë paraqitur të dy çiftet e këndeve të kryqëzuara.



Kēndet e kryqēzuara janë të barabarta midis tyre.

Kur një drejtëz pret dy drejtëza paralele, ekzistojnë dy prerje ose dy pika prerëse.

Drejtëza që i pret dy drejtëzat paralele quhet transversale.

Kënde përgjegjëse janë këndet që gjenden në anë të njëjtë të transversales dhe atë, njëri është i brendshëm, kurse tjetri i jashtëm.

Në vizatime janë paraqitur disa çifte të këndeve përgjegjëse.



Këndet përgjegjëse janë të barabarta midis tyre.

Këndet alternative gjenden në anë të ndryshme të transversalës dhe të dy janë kënde të jashtme ose të brendshme.

Në vizatimet janë paraqitur disa çifte të këndeve alternative.



Këndet alternative janë të barabarta midis tyre.

Në zgjidhjen e detyrave gjithmonë duhet të potencojmë përse disa kënde janë të barabarta.

Shembulli 6

Njehsoje madhësinë e këndeve të shënuara me shkronja në vizatim.

Brinjët horizontale janë paralele.

Shpjegoji zgjidhjet tuaja.



$a° = 180° - 76°$

$= 104°$ Shuma e këndeve që formojnë drejtëz është 180°.

$b° = 76°$ Kënde përgjegjëse.

$c° = 94°$ Kënde të kryqëzuara.

Të mbajmë mend se kur dy drejtëza priten, atëherë kemi dy çifte të këndeve, të njohura si kënde të kryqëzuara. Këndet e kryqëzuara janë të barabarta.

$d° = 540° - (104° + 76° + 135° + 94°)$

$= 540° - 409°$

$= 131°$ Shuma e këndeve të brendshme te pesëkëndëshi është 540°.

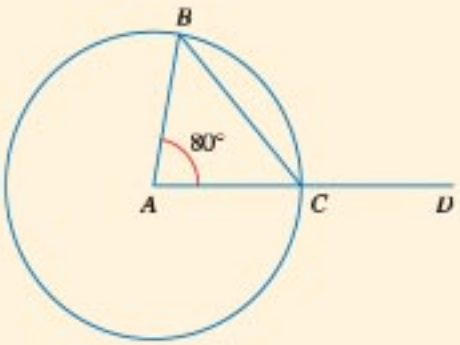
Shembulli 7

Pika a është qendër e vijës rrethore.

Pikat B dhe C janë pika të vijës rrethore.

ACD është drejtëz.

$\sphericalangle BAC = 80°$



a) Njehsoje $\sphericalangle ABC$.

b) Njehsoje $\sphericalangle BCD$.

Sqaro rezultatet e fituara.

a) $\overline{AB} = \overline{AC}$ Të dy segmentet janë rreze të vijës rrethore.

Trekëndëshi ABC është trekëndësh barakrahës.

$\sphericalangle ABC = (180° - 80°) : 2$ Shuma e këndeve në trekëndëshin barakrahës është 180°.

$= 50°$

b) $\sphericalangle ACB = 50°$

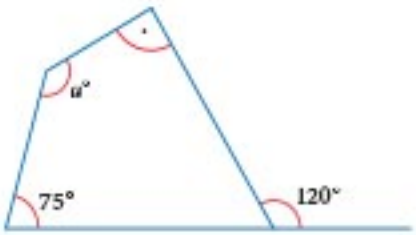
$\sphericalangle BCD = 180° - 50°$ Shuma e këndeve që formojnë drejtëz është 180°.

$= 130°$

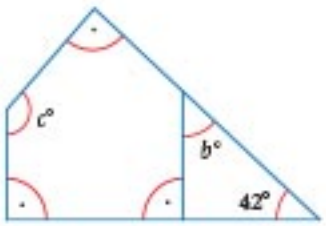
Detyra

1. Njehsoji këndet e shënuara me shkronja te vizatimet e dhëna.

a)

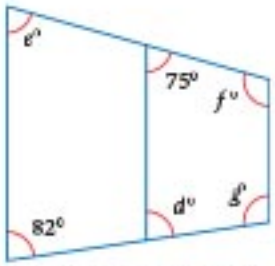


b)



brinjët vertikale janë paralele.

c)



brinjët vertikale janë paralele.

2. ABC është trekëndësh.

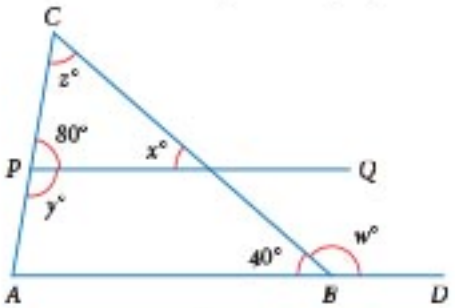
PQ është drejtëz paralele me AB.

$\sphericalangle ABC = 40°$

$\sphericalangle CPQ = 80°$

Njehsoji këndet $w°$, $x°$, $y°$ dhe $z°$.

Sqaroji zgjidhjet e fituara.



3. $ABCDE$ është pesëkëndësh.

AM është bosht i simetrisë.

$\sphericalangle ABC = 85°$

$\sphericalangle CDE = 130°$

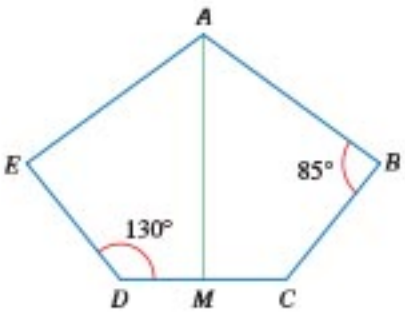
Njehso:

a) $\sphericalangle AED$

b) $\sphericalangle BCD$

c) $\sphericalangle BAE$

ç) $\sphericalangle AMC$.



4. $ABCDEF$ është gjashtëkëndësh i rregullt.

a) Njehsoje $\sphericalangle ABC$.

Është tërhequr diagonalja prej A në C.

b) I cilit lloj është trekëndëshi ABC?

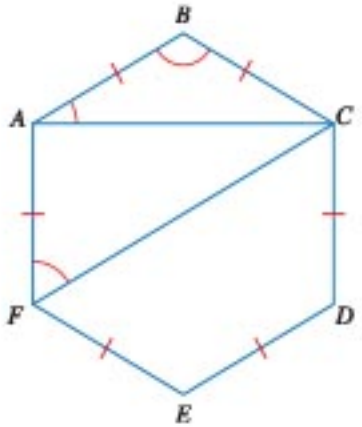
c) Njehsoje $\sphericalangle BAC$.

ç) Njehsoje $\sphericalangle CAF$.

Tjetër diagonale është tërhequr mes pikave C dhe F.

d) Njehsoje $\sphericalangle AFC$.

dh) I cilit lloj është trekëndëshi ACF?

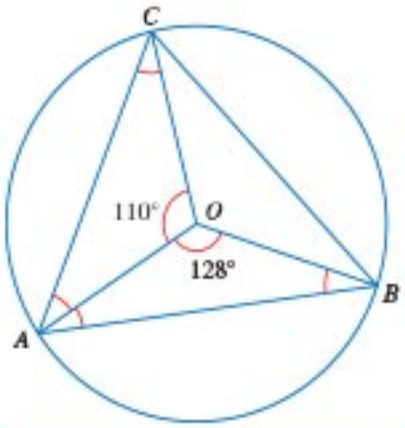


5. Në vizatim është paraqitur vija rrethore me qendër në O.

ABC është trekëndësh me kulmet A, B dhe C të cilat shtrihen në vijën rrethore.

$\sphericalangle AOB = 128°$

$\sphericalangle AOC = 110°$



a) Njehsoje $\sphericalangle BOC$. Sqaroje zgjidhjen që fitove.

b) Njehsoje $\sphericalangle OCA$. Sqaroje zgjidhjen që fitove.

c) Njehsoje $\sphericalangle OCB$. Sqaroje zgjidhjen që fitove.

ç) Njehsoje $\sphericalangle ACB$.

d) Trego se $\sphericalangle AOB$ është dy herë më i madh se $\sphericalangle ACB$.

O është qendër e vijës rrethore, prandaj $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Përdori vetitë e trekëndëshave barakrahës.

Kjo detyrë është shembull për një rregull të përgjithshme: Këndi me kulm në vijë rrethore është dy herë më i vogël se këndi me kulm në qendër të saj.

8.5 **Mozaikët** e rregullt

Matematika në dizajn



Në figurë është treguar një pjesë e murit të pallatit mbretëror Alkazar në Sevilje, Spanjë, projektuar fillimisht nga mbretërit mavarë. Ky pallat i vjetër mbretëror tani është pjesë e trashëgimisë botërore të UNESKO-s.

Në të ka shembuj të mirë për atë se si ndërtuesit dhe arkitektët islamë kanë përdorur forma matematikore për të konstruktuar mozaikë.

Në Maqedoni ekzistojnë mbetje të ruajtura të mozaikëve madhështorë në vendin arkeologjik Heraklea afër Manastirit.

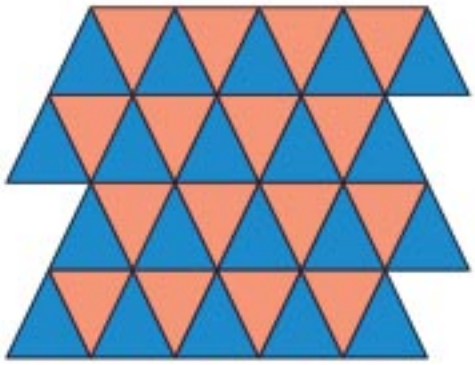




Tesalacioni ose shtruarja me pllaka është procedurë e mbulimit të sipërfaqeve të rrafshëta me një ose me kombinim të shumë 2D-formave pa përputhje dhe pa zbrazëtira mes tyre.

Tesalacion mund të bëjmë dhe nga shumëkëndësha të rregullt.

Në figurë është treguar tesalacioni i bërë nga trekëndëshat barabrinjës.



Trekëndëshi barabrinjës është **shumëkëndësh i rregullt.**

Një shumëkëndësh është i rregullt nëse të gjitha brinjët e tij janë të barabarta mes veti dhe gjitha këndet e tij janë të barabarta mes veti.

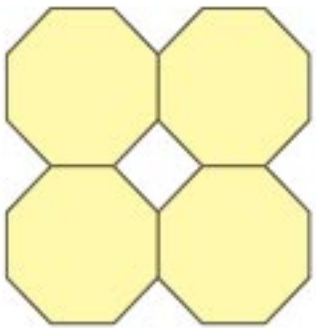
Kur mozaiku është i përbërë prej shumëkëndëshave të rregullt e quajmë **mozaik i rregullt.**

Çdo kënd i brendshëm në trekëndëshin barabrinjës është 60^0.

Në secilin kulm të mozaikut "takohen" gjashtë kënde.

E dimë se është mozaik pasi që $6 \cdot 60^0 = 360^0$, respektivisht madhësia e këndit të brendshëm është pjesëtues i 360^0.

Në vizatim janë paraqitur disa tetëkëndësh të rregullt.



Kur katër tetëkëndësha afrohen afër njëri tjetrit, do të paraqitet zbrazëtirë në formë katrori.

Me tetëkëndësha të rregullt nuk mundemi të formojmë mozaik.

T'i kontrollojmë këndet e brendshme.

Çdo kënd i brendshëm ka 135°.

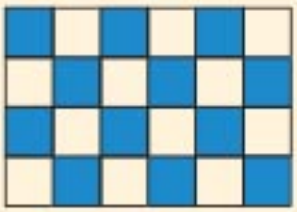
$135° \cdot 2 = 270°$ dhe $135° \cdot 3 = 405°$, pra 135° nuk është pjesëtues i 360°.

Vijmë në përfundim se nuk mund të vendosen kënde prej 135° rreth një pike pa u paraqitur zbrazëtirë.

Shembulli

a) Formo mozaik prej katërkëndëshave të rregullt.

b) Caktoje madhësinë e këndit të brendshëm të tij dhe shpjego përse është i mundshëm krijimi i mozaikut nën **a)**.



a) Katërkëndëshi i rregullt ka katër brinjë të barabarta dhe katër kënde të barabarta.

Ai është katror.

Në vizatimin djathtë është paraqitur formimi i mozaikut prej katrorëve.

b) Këndi i brendshëm i katrorit është 90°.

90° është pjesëtues i 360° meqenëse $4 \cdot 90^0 = 360^0$.

Ka katër kënde nga 90° që "takohen" në secilin kulm të brendshëm të mozaikut.

Detyra

1. **a)** Njehsoje këndin e brendshëm të gjashtëkëndëshit të rregullt.

Shiko në temën 3 nëse ke nevojë për rikujtim.

b) Trego se 120° është pjesëtues i 360°.

c) Vizato mozaik të rregullt duke përdorur gjashtëkëndësha të rregullt.

2. Më parë mësuam për njehsim të këndit të brendshëm të disa shumëkëndëshave të rregullt.

Në tabelën e dhënë janë paraqitur madhësitë e këndeve të brendshme të disa shumëkëndëshave të rregullt.

Numri i brinjëve	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Këndi i brendshëm	60°	90°	108°	120°	126.6°	135°	140°	144°	150°	156°	162°

Treguam se këndet e brendshme të shumëkëndëshave të rregullt me 3, 4 dhe 6 brinjë janë pjesëtues të 360°.

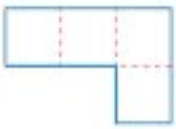
a) Kontrollo se edhe ndonjë prej këndeve të brendshme në tabelë janë pjesëtues të 360°.

Pjesëtues i 360 është numri me të cilin 360 pjesëtohet pa mbetje.

b) Trego se ekzistojnë vetëm tre mozaikë të rregullt.

3. 2D-forma në formë ë shkronjës L është formuar nga katër katrorë.

Vizato katër tesalacione nga kjo 2D-formë.



Përdor fletoret me katrorë për vizatim më të lehtë të mozaikut.

4. Dimë se dy tetëkëndësha dhe katrorë mund të formojnë mozaik.

Ky mozaik quhet mozaik gjysmë i rregullt.

Mozaiku i tillë është i përbërë prej më tepër lloje të shumëkëndëshave të rregullt.

a) Mblidhi këndet e brendshme të dy tetëkëndëshave dhe një katrori.

Trego se shuma e fituar është 360°.

b) Mblidhni këndet e brendshme të dy gjashtëkëndëshave dhe dy trekëndëshave barabrinjës.

Trego se shuma e fituar është 360°.

c) Vizato mozaik gjysmë të rregullt me 2 gjashtëkëndësha dhe 2 trekëndësha në secilin kulm të brendshëm.

ç) Kontrollo a mund të gjesh tjetër kombinim të këndeve të brendshme, shuma e të cilit është 360°.

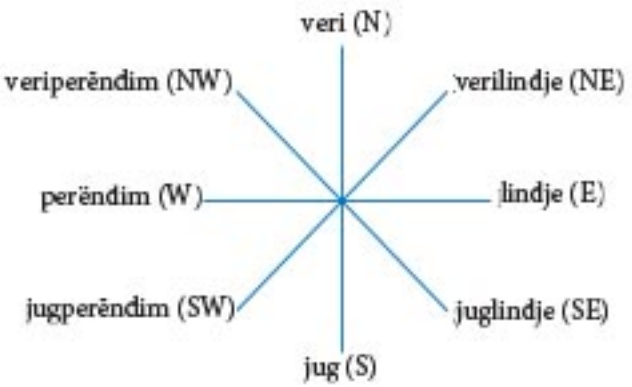
Gjej tjetër mozaik gjysmë të rregullt.

Ekzistojnë gjithsej 8 kombinime të tilla, por disa prej tyre janë të vështira për t'i vizatuar.

8.6 Hartat dhe azimuti

Azimuti

Historikisht shikuar, udhëtarët më shpesh janë orientuar duke përdorur **busull**.





Në vizatim janë paraqitur tetë kahet kryesore të busullës.

Me kombinim të tyre fitohen shumë kahe të cilat përdoren me busull.

Për udhëtimet bashkëkohore ky lloj orientimi nuk është mjaft preciz.

Kahet sot definohen përmes azimutit.

Azimuti është kënd i matur nga veriu në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës.

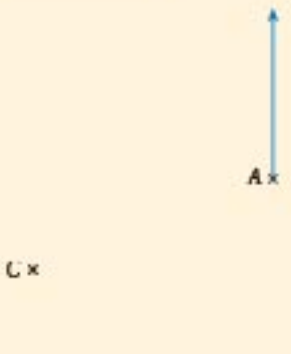
Azimutet rëndomë shkruhen me tri shifra. Azimut prej 45° shkruhet si 045°.

Shembulli në vazhdim tregon si të matim azimut përmes këndmatësit.

Shembulli 1

Le të jenë A, B dhe C tri pika në hartë.

a) Mate azimutin prej A deri në B. **b)** Mate azimutin prej A deri në C.



a) Vizatojmë drejtëz prej A deri në B.

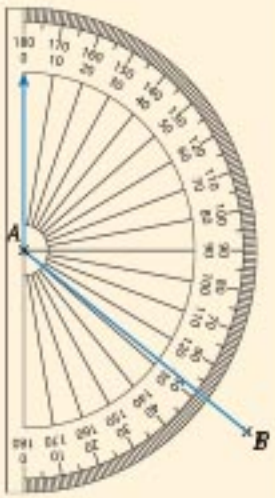
E vendosim këndmatësin me shenjën 0° në kahun verior prej A.

Qendra e këndmatësit duhet të vendoset në pikën A.

Shkalla e brendshme është ajo që fillon me zero në drejtëzën veriore.

Lexojmë këndin deri në B.

Azimuti është 128°.

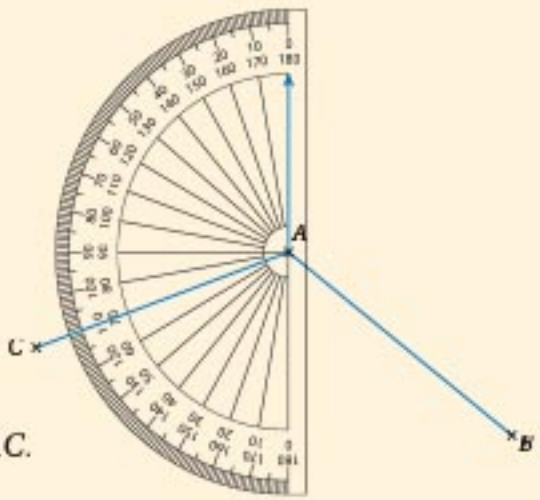


b) Vizatojmë drejtëz prej A deri në C.

Këndmatësin e vendosur sikur nën **a)** nuk mundemi ta shfrytëzojmë.

Që ta gjejmë azimutin e C, këndmatësin e vendosim në anën tjetër të drejtëzës veriore.

Ekzistojnë dy mënyra për gjetje të azimutit.



Mënyra e parë: Lexojmë nga jugu (prej drejtëzës jugore me fillim në 0^0 në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës, deri në drejtëzën AC.

Fituam kënd prej 70°.

Këndi prej drejtëzës veriore deri ta ajo jugore është 180°.

Azimuti prej A deri në C është 180° + 70°= 250°.

Mënyra e dytë: Lexojmë nga veriu (prej drejtëzës veriore me fillim në 0°) në drejtim të kundërt me lëvizjen e akrepave të orës, deri te pika C.

Fituam këndin prej 110°.

Azimuti prej A deri në C është 360° - 110° = 250°.

Raporti i hartave

Objektet dhe sipërfaqet në harta shpeshherë janë të paraqitur në raport.

Raporti 1 : 200000 në hartë domethënë se 1 centimetër në hartë paraqet 200000 centimetra në natyrë.

1 cm : 200000 cm

1 cm : 2000 m Pjesëtojmë me 100 meqenëse në 1 metër ka 100 centimetra.

1 cm : 2 km Pjesëtojmë me 1000 meqenëse në 1 km ka 1000 m.

Raporti 1 : 200000 është i njëjtë me raportin përmes të cilit me 1 cm janë paraqitur 2 km.

Shembulli 2

Raporti i hartës është 1 : 250000.

Rruga në hartë është e gjatë 6 cm.

Sa është gjatësia e rrugës në natyrë ose gjatësia e vërtetë?

1 cm : 250000 cm

1 cm : 2500 m

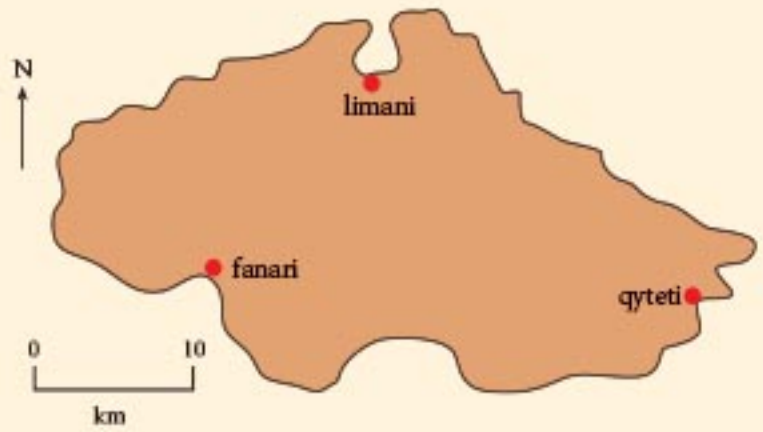
1 cm : 2,5 km

Çdo centimetër në hartë paraqet 2,5 km.

Largesa prej 6 cm në hartë paraqet $6 \cdot 2{,}5 = 15$ km.

Shembulli 3

Në hartë të dhënë është paraqitur ishull me qytet, liman dhe fanar limani.



Raporti i hartës është 1 : 500000.

Njehso:

a) Distancën mes qytetit dhe limanit.

b) Azimutin prej fanarit deri te limani.

a) Raporti i hartës është 1 : 500000.

1 cm : 500000 cm

1 cm : 5000 m

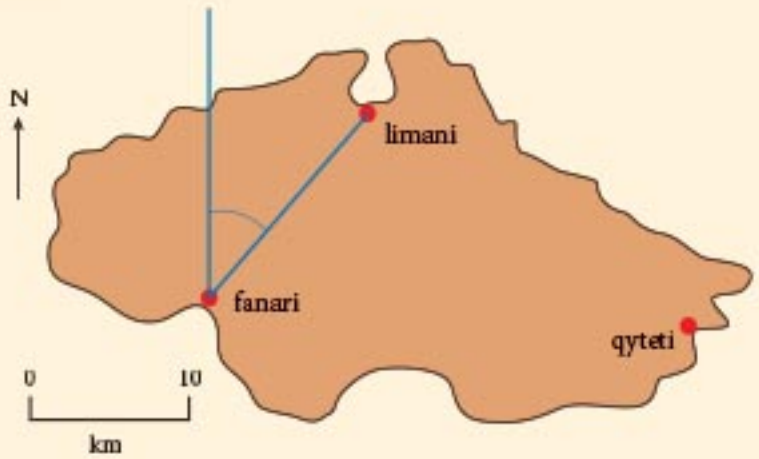
1 cm : 5 km

Çdo centimetër në hartë paraqet 5 km.

Distanca në hartë mes qytetit dhe limanit është 4,8 cm.

Distanca e vërtetë është $4{,}8 \cdot 5 = 24$ km.

b) Vizatojmë drejtëzën veriore në fanarin dhe vizatojmë drejtëz ndërmjet fanarit dhe limanit.



E matim këndin të formuar mes dy drejtëzave.

Azimuti është 042°.

Detyra

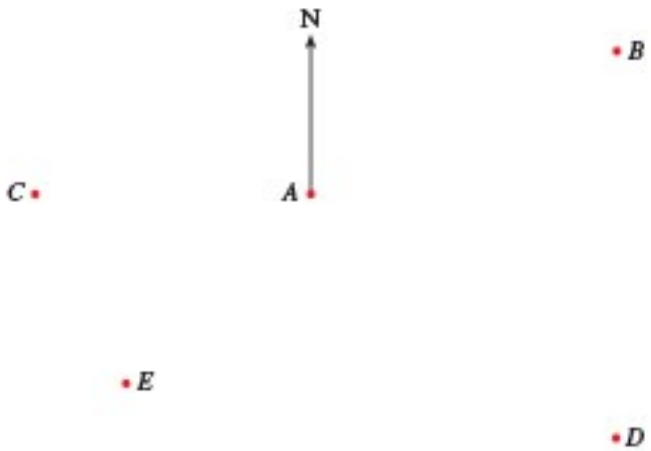
1. Janë dhënë raporte të hartave. Njehso çfarë paraqet 1 cm në secilin raport.

a) 1 : 500000 **b)** 1 : 2000 **c)** 1 : 50000 **ç)** 1 : 40000000 **d)** 1 : 25000000

2. Shkruaji raportet e dhëna të hartave:

a) 1 cm paraqet 1 km **b)** 1 cm paraqet 50 km **c)** 1 cm paraqet 250 m

3. Në vizatim janë paraqitur pesë vende të shënuara me shkronja *A*, *B*, *C*, *D* dhe E.



Cakto azimut:

a) prej A deri në B **b)** prej A deri në C **c)** prej D deri në A **ç)** prej C deri në E

4. Shfrytëzoje hartën nga detyra 3 që t'i përgjigjesh pyetjeve:

a) Cila pikë gjendet në veri prej D?

b) Cila pikë gjendet në jugperëndim prej A?

c) Sa është kahu prej C deri në A?

5. Në hartë janë paraqitur katër qytete.

Raporti i hartës është 1 : 200000.



a) Njehso sa kilometra janë paraqitur me 1 cm në hartë.

b) Cakto distancën mes Ohrit dhe Shtipit në kilometra.

c) Njehso azimut prej Shtipit deri në Ohër.

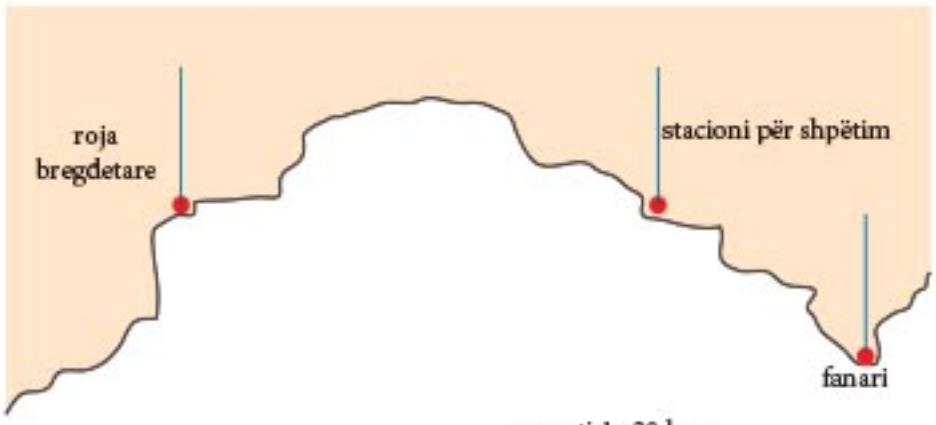
Piloti i helikopterit duhet të kryej fluturimin prej Dibrës deri në Strumicë.

ç) Njehso azimut e Strumicës nga Dibra.

d) Gjeje distancën nga Dibra deri në Strumicë në kilometra.

6. Harta e dhënë tregon pjesë të bregdetit.

Rivizatoje hartën në fletore.



raporti 1 : 20 km

Një anije ndodhet në fatkeqësi dhe dërgoi sinjal për rrezik që është pranuar nga fanari dhe roja bregdetare.

a) Anija gjendet në azimut prej 135° nga roja bregdetare.

Vizato drejtëz në hartë që të paraqesësh azimut prej 135° nga roja kufitare.

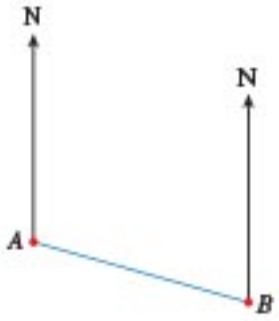
b) Anija është në azimut prej 260° nga fanari.

Vizato drejtëz në hartë që të paraqesësh azimut prej 260° nga fanari.

c) Vendi ku priten drejtëzat paraqet vendpozitën e anijes.

Cakto distancën prej anijes deri te stacioni i shpëtimit.

ç) Çfarë azimuti ka nga stacioni i shpëtimit deri te anija?



7. Në vizatim janë paraqitur dy pika A dhe B, së bashku me drejtëzat veriore.

a) Njehsoje vlerën e azimutit të B nga A.

b) Pa matje të këndit te B, njehso azimut të A nga B.

Ky është i njohur si azimut i kundërt.

Të dy drejtëzat veriore janë paralele. Shfrytëzoje diturinë tënde mbi drejtëzat paralele për të njehsuar azimutin.

Azimuti dhe azimuti i kundërt gjithnjë dallohen për 180°.

Nëse një azimut është më i vogël se 180°, atëherë shto 180° për të gjetur azimutin e kundërt.

c) Njehso azimutin e kundërt për azimutet e dhëna:

i 065° **ii** 154° **iii** 217° **iv** 300° **v** 270°

8.7 Teorema e Pitagorës

Pitagora ishte matematikan grek i cili ka jetuar diku para 2500 viteve.

Është marrë me trekëndësha kënddrejtë.



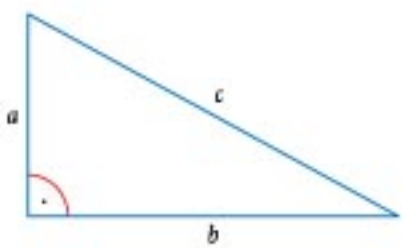
Edhe para kohës së tij ishte e njohur se çdo trekëndësh brinjët e të cilit janë në raport 3 : 4 : 5 është trekëndësh kënddrejtë.

Babilonasit, kinezët dhe egjiptianët përdornin trekëndëshat me brinjët 3, 4 dhe 5 njësi matëse për të qenë të sigurt se këndet e objekteve të tyre janë të drejta.

Teorema që mban emrin e Pitagorës është një nga teoremat më të njohura në matematikë.

Ajo vlen vetëm për trekëndëshat kënddrejtë.

I shënojmë brinjët a, b dhe c në trekëndëshin kënddrejtë.



Brinja c është **hipotenuza** dhe është brinja më e madhe e trekëndëshit.

Hipotenuza është brinja përballë këndit të drejtë.

Teorema e Pitagorës thotë:

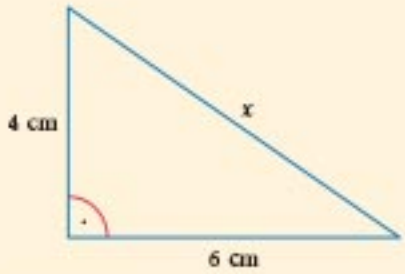
$$a^2 + b^2 = c^2$$

ose me fjalë: "Katrori i hipotenuzës është i barabartë me shumën e katrorëve të dy brinjëve tjera".

Formula mund të zbatohet vetëm atëherë kur të tri brinjët janë dhënë me njësi të njëjtë matëse.

Shembulli 1

Njehso gjatësinë e brinjës x.



Në fillim kontrollojmë cila brinjë është hipotenuzë.

Brinja x është hipotenuza. Dy brinjët më të shkurta janë me gjatësi 4 cm dhe 6 cm.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës:

$a^2 + b^2 = x^2$	E shkruajmë teoremën e Pitagorës për trekëndëshin.
$4^2 + 6^2 = x^2$	I zëvendësojmë a dhe b me vlerat përkatëse 4 dhe 6.
$16 + 36 = x^2$	Njehsojmë 4^2 dhe 6^2.
$52 = x^2$	
$x = \sqrt{52}$	Rrënjëzimi është operacion invers i operacionit kuadrim.
$x = 7{,}21$ cm (në 2 v.dh.)	Zgjidhjen e shënojmë me shkallë saktësie.

Shembulli 2

Njehso gjatësinë e brinjës h.

Zgjidhjen do ta rrumbullakojmë në 1 vend dhjetor.



Hipotenuza është 11 cm, kurse dy tjerat janë 6 cm dhe h.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës:

$a^2 + b^2 = c^2$ — E shkruajmë teoremën e Pitagorës për trekëndëshin.

$6^2 + h^2 = 11^2$ — Zëvendësojmë vlerat a dhe c me vlerat 6 dhe 11.

$h^2 = 11^2 - 6^2$ — Zbresim 6^2 prej të dy anët.

$h^2 = 121 - 36$ — Llogarisim 11^2 dhe 6^2.

$h^2 = 85$

$h = \sqrt{85}$

$h = 9{,}2$ (në 1 v.dh.) — Rrumbullakojmë në 1 vend dhjetor.

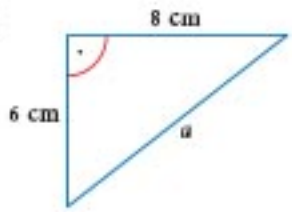
Në fund e shqyrtojmë zgjidhjen e fituar dhe pastaj e kontrollojmë. Në këtë rast 9,2 është më e vogël se 11, prandaj kjo zgjidhje është zgjidhje e mirë.

Detyra

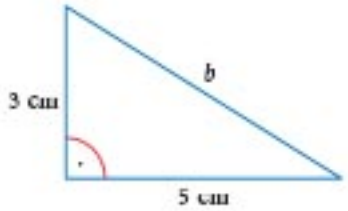
Atyku është e domosdoshme, rrumbullakoje zgjidhjen në 3 shifra të rëndësishme, nëse nuk është kërkuar ndryshme në detyra.

1. Njehso gjatësitë e brinjëve të shënuara me shkronja.

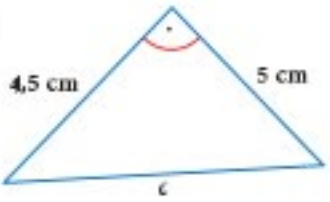
a)



b)

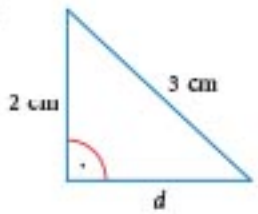


c)

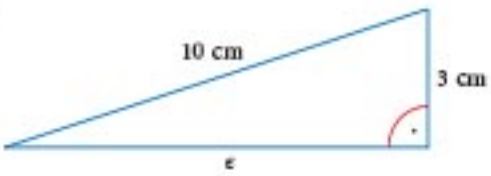


2. Njehso gjatësitë e brinjëve të shënuara me shkronja.

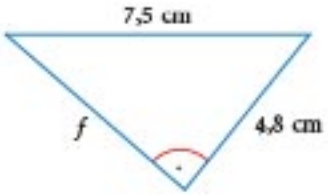
a)



b)

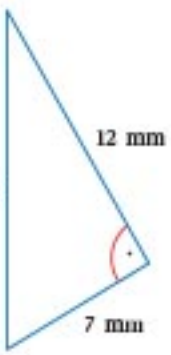


c)



3. Njehso gjatësitë e brinjëve të shënuara me shkronja.

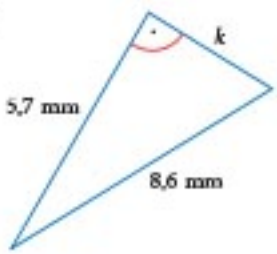
a)



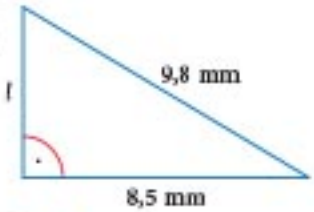
b)



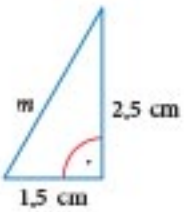
c)



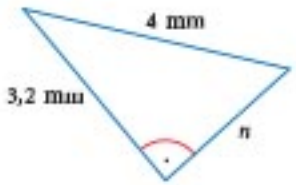
ç)



d)



dh)

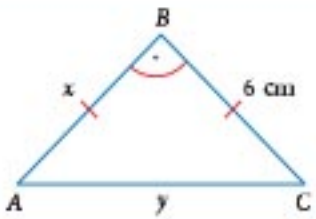


4. ABC është trekëndësh këndrejtë barakrahës.

$\overline{BC} = 6$ cm

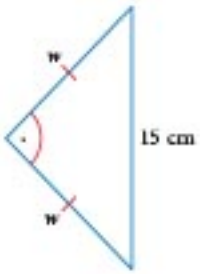
a) Njehso gjatësinë e brinjës x.

b) Njehso gjatësinë e brinjës y.



5. Në vizatim është paraqitur trekëndësh këndrejtë barakrahës.

Njehso gjatësinë e brinjës w.



Në fillim shkruaj barazim në të cilin w paraqitet si ndryshore.

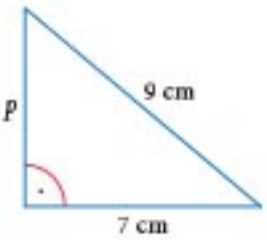
6. Luka me teoremën e Pitagorës u orvat të gjejë gjatësinë të shënuar me p në trekëndëshin e dhënë.

$7^2 + 9^2 = p^2$

$49 + 81 = p^2$

$130 = p^2$

$p = \sqrt{130} = 11{,}4$ cm (në 1 v.dh.)



a) Përse menjëherë mund të thuash se ka gabuar.

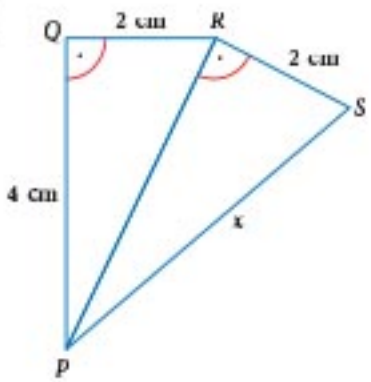
b) Njehso zgjidhjen e saktë.

Shqyrtoni gjatësitë e brinjëve. Kjo zgjidhje a paraqet zgjidhje të mirë?

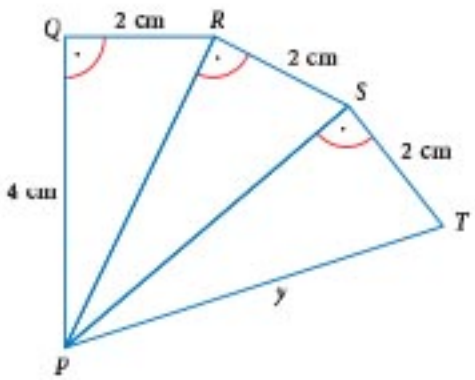
7. Spiralet mund të formohen duke ndërlidhur një varg trekëndësha këndrejtë si në vizatimet më poshtë.

Njehso gjatësitë e brinjëve të shënuara me x dhe y te vizatimet (spiralet) e dhëna.

a)



b)



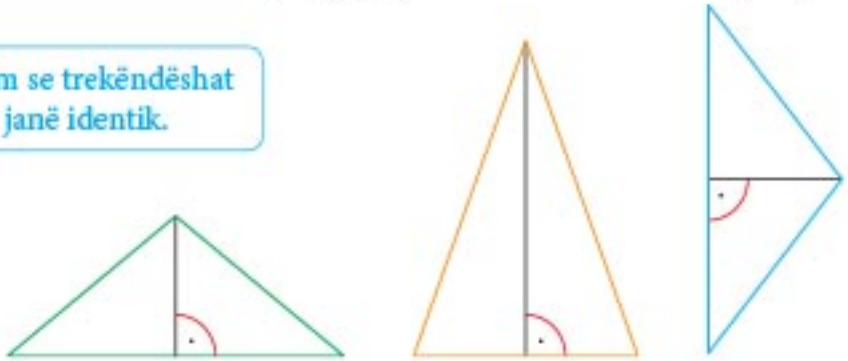
Në fillim duhet të njehsosh brinjën e tretë të trekëndëshit të parë në të majtë.

8.8 Zbatimi i teoremës së Pitagorës

Trekëndëshat barakrahës

Trekëndësh barakrahës mund të formojmë prej dy trekëndëshave kënddrejtë të puthitshëm.

Të përmendim se trekëndëshat e puthitshëm janë identik.



Rrjedh se mund ta zbatojmë teoremën e Pitagorës te trekëndëshat barakrahës.

Shembulli 1

ABC është trekëndësh barakrahës me $\overline{AB} = \overline{AC}$.

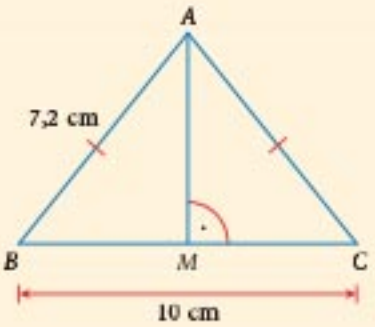
$\overline{AM}$ është drejtëz normale me $\overline{BC}$.

$\overline{AB} = 7{,}2$ cm dhe $\overline{BC} = 10$ cm.

a) Njehso gjatësinë e $\overline{AM}$.

b) Njehsoje syprinën e trekëndëshit ABC.

Zgjidhjen rrumbullakoje në tri shifra të rëndësishme.



a) Ta skicojmë një prej trekëndëshave kënddrejtë.

Për shembull, trekëndëshi ABM.

$\overline{BM} = 5$ cm meqenëse gjatësia e saj është sa gjysma e gjatësisë së bazës $\overline{BC}$.

Hipotenuza e trekëndëshit është 7,2 cm.

Le të jetë $\overline{AM} = x$.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës:

$5^2 + x^2 = 7{,}2^2$

$x^2 = 7{,}2^2 - 5^2$

$x^2 = 26{,}84$

$x = \sqrt{26{,}84} = 5{,}18$ cm (në 3 sh.r.)

Gjatësia e $\overline{AM} = 5{,}18$ cm (në 3 sh.r.)



b) Syprina e trekëndëshit = $\frac{1}{2}$ · baza · lartësia

Syprina e trekëndëshit $ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5{,}1807\ldots$

$= 25{,}9$ cm² (në 3 sh.r.)

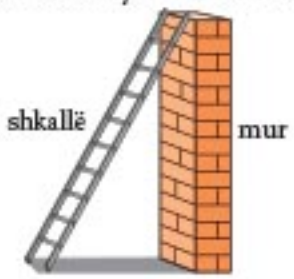
Nën **b)** mos e përdor vlerën e zgjidhjes nën **a)** të rrumbullakuar me 3 shifra të rëndësishme. Përdor së paku 4 shifra të rëndësishme në njehsim që të mos zvogëlohet saktësia.

Nëse në kalkulatorin tënd ka tast Ans, atëherë mund të shumëzosh $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot$ Ans.

Zbatimi praktik i teoremës së Pitagorës

Ekzistojnë shumë detyra të cilat mund të zgjidhen me zbatim të teoremës së Pitagorës.

Për shembull, shkalla e vendosur në dysheme horizontale dhe e mbështetur për muri vertikal formon trekëndësh kënddrejtë së bashku me dyshemenë dhe murin vertikal.



Kur zgjidhim detyra, duhet të vizatojmë vizatim adekuat që të shohim si janë parashtruar elementet e dhëna dhe si është formuar trekëndëshi kënddrejtë.

Zgjidhjen duhet ta paraqesim me shkallë të caktuar saktësie.

Shembulli 2

Shkalla është vënë në dysheme horizontale dhe me pjesën e sipërme është mbështetur për murin vertikal.

Shkalla është e gjatë 5 metra.

Skaji i poshtëm i shkallës është larguar 2,2 metra nga muri.

Cilën lartësi e arrin skaji i sipërm i shkallës?

Në fillim do të vizatojmë vizatim për të ditur si janë parashtruar elementet e nevojshme.

Në vizatim është paraqitur trekëndëshi kënddrejtë.



Hipotenuza është e gjatë 5 metra.

Me teoremën e Pitagorës:

$2{,}2^2 + h^2 = 5^2$

$h^2 = 5^2 - 2{,}2^2$ Zbresim $2{,}2^2$ në dy anët.

$h^2 = 20{,}16$

$h = \sqrt{20{,}16} = 4{,}49$ m (në 2 v.dh.) Rrumbullakojmë në 2 vende dhjetore.

Shkalla arrin lartësinë prej 4,49 metra.

Shembulli 3

Helikopteri u nis nga aeroporti dhe fluturonte me shpejtësi 120 km në drejtimin veri.

Pastaj fluturoi 45 kilometra në drejtimin lindje.

Sa është larguar helikopteri nga aeroporti?

Në fillim do të vizatojmë vizatimin për t'i shqyrtuar elementet e shtruara.

E shënojmë brinjën e tretë të trekëndëshit me x.

Në vizatim kemi trekëndësh kënddrejtë me hipotenuzë të panjohur x.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës:

$45^2 + 120^2 = x^2$

$16425 = x^2$

$x = \sqrt{16425} = 128{,}2$ km (në 1 v.dh.) E rrumbullakuar në 1 v.dh.

Helikopteri është larguar prej aeroportit 128,2 kilometra.



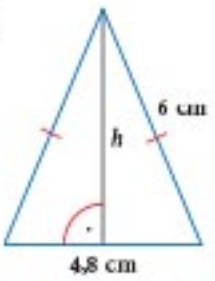
Detyra

Për detyrat prej 1 deri në 3 rrumbullako zgjidhjen në 3 shifra të rëndësishme aty ku është e domosdoshme.

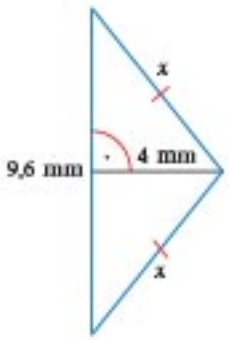
Për detyrat prej 4 deri më 10 cakto shkallën e saktësisë, nëse ajo nuk është e dhënë në detyrë.

1. Njehso gjatësitë e segmenteve të shënuara me shkronja te trekëndëshat e dhënë barakrahës.

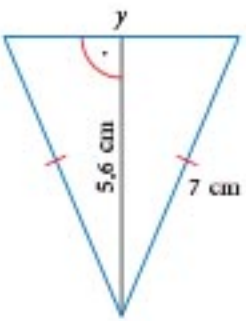
a)



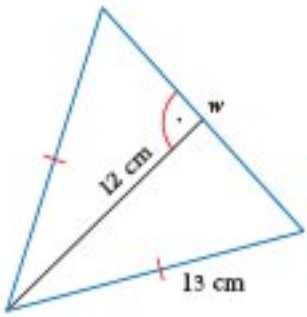
b)



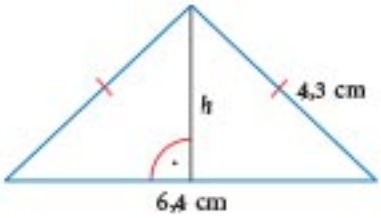
c)



ç)



2. Në vizatim është dhënë trekëndëshi barakrahës.



a) Njehsoje lartësinë h.

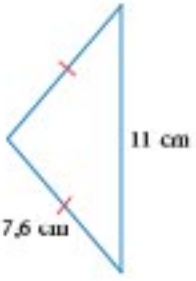
b) Njehsoje syprinën e trekëndëshit.

3. Njehsoje syprinën e çdo trekëndëshi të dhënë barakrahës.

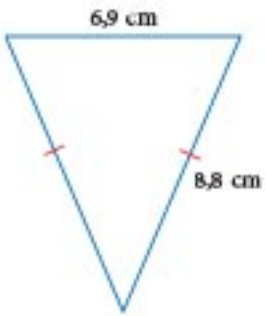
a)



b)



c)



4. Anija nis lundrimin duke kaluar 60 kilometra në jug dhe pastaj 48 kilometra në perëndim.

Sa është larguar anija prej pikës fillestare?

5. Shkalla është vendosur në dysheme horizontale dhe me pjesën e sipërme është mbështetur në mur vertikal.

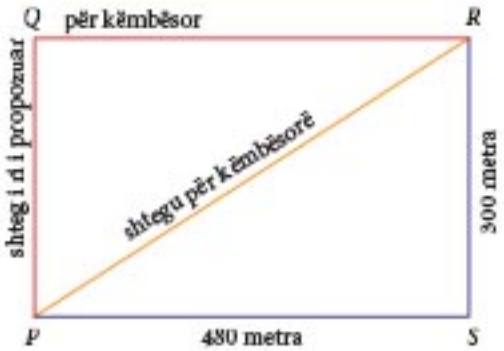
Shkalla është e gjatë 6 metra.

Skaji i sipërm i shkallës kështu i mbështetur arrin lartësinë 5,35 metra në mur.

Sa është larguar nga muri skaji i poshtëm i shkallës?

Zgjidhjen rrumbullakoje deri në centimetrin më të afërt.

6. Është dhënë skica e një are.



Ekziston shteg për këmbësor që kalon nëpër diagonalen e arës nga P në R.

a) Njehso gjatësinë e shtegut diagonal.

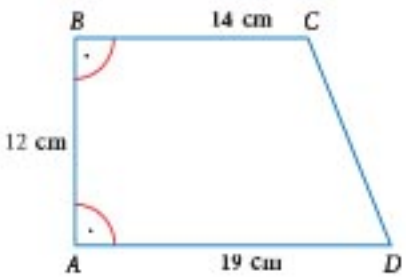
Pronari i arës dëshiron të zhvendosë shtegun për këmbësor përgjatë tehut të arës nga P përmes Q në R.

b) Sa do të jetë më i gjatë shtegu i ri i propozuar në raport me shtegun përgjatë diagonales së arës.

7. Në vizatim është paraqitur trapezi $ABCD$. $\overline{BC}$ është paralel me $\overline{AD}$.

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 90°$.

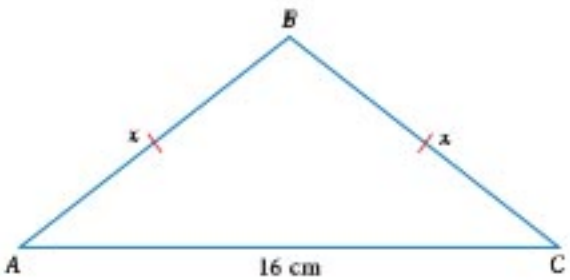
Njehso gjatësinë e $\overline{CD}$.



Vizato drejtëz normale prej C deri $\overline{AB}$ që të fitosh trekëndësh kënddrejtë.

8. Në vizatim është paraqitur trekëndësh barakrahës.

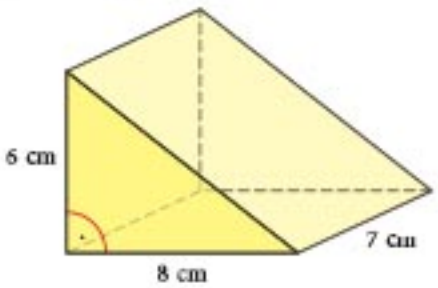
Syprina e trekëndëshit është 72 cm².



Fillimisht njehso lartësinë.

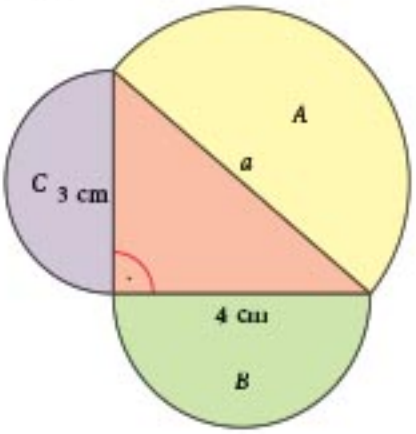
Njehso gjatësinë e brinjës të shënuar me x.

9. Njehsoje syprinën e prizmit.



Njehsoje syprinën e trekëndëshit me formulën syprina $= \frac{1}{2} \cdot$ baza $\cdot$ lartësia

10. Në vizatim është paraqitur trekëndësh kënddrejtë dhe nga një gjysmërreth në secilën brinjë të saj.



a) Njehso gjatësinë e hipotenuzës a.

b) Njehsoje syprinën e gjysmërrethit C.

Zgjidhjen rrumbullakoje në tre vende dhjetore.

c) Njehsoje syprinën e gjysmërrethit B.

Zgjidhjen rrumbullakoje në tre vende dhjetore.

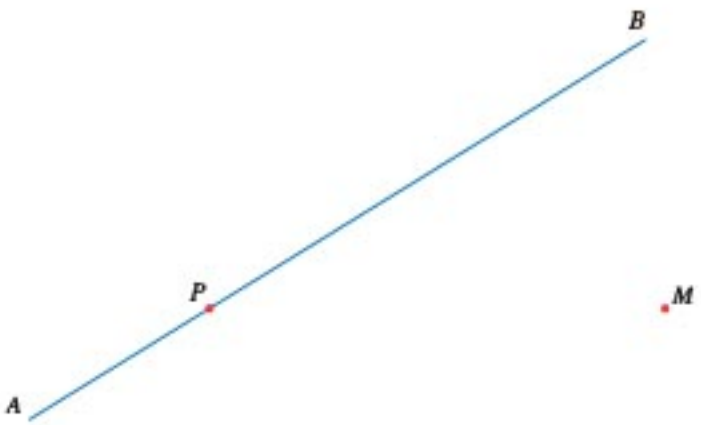
ç) Njehsoje syprinën e gjysmërrethit A.

Zgjidhjen rrumbullakoje në tre vende dhjetore.

d) Mblidhi syprinat e dy gjysmërrathëve më të vogla. Çfarë konstaton?

Detyra për përsëritje

1. Vizatoje vizatimin në fletore.



a) Vizato paralele të AB e cila nëpër pikën P.

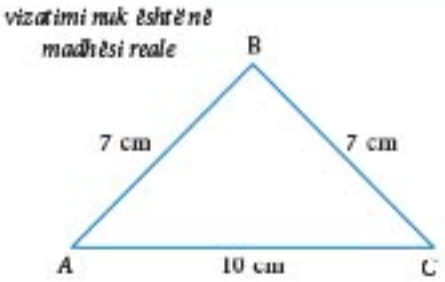
b) Nëpër pikën M vizato drejtëz e cila me paralelen e AB zë kënd prej 90°.

2. **a)** Konstrukto trekëndëshin ABC që është paraqitur në vizatim.

b) Vizato drejtëz nga B e cila e pret AC nën kënd të drejtë.

c) Mate lartësinë e trekëndëshit.

ç) Njehsoje syprinën e trekëndëshit.



3. Në vizatim është paraqitur kopsht në formë trekëndëshi ABC.

Është vizatuar në raport 1 cm : 2m

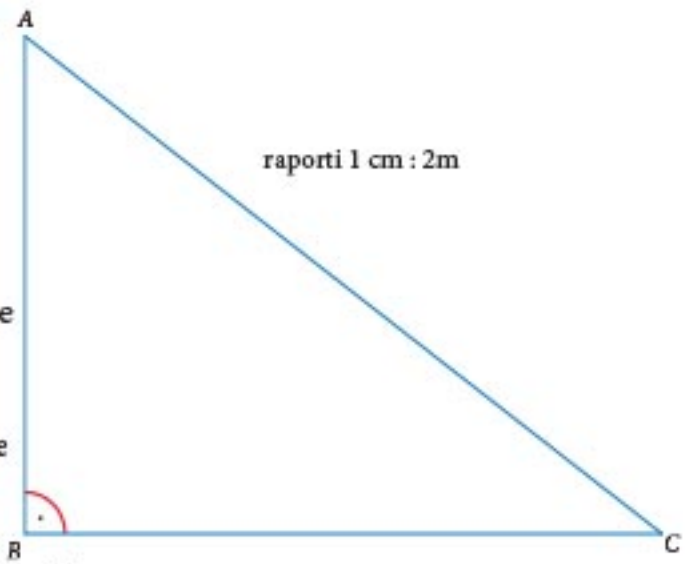
a) Rivizatoje vizatimin në fletore.

Duhet të mbillet pemë e larguar 8 metra prej A dhe 6 metra prej BC.

b) Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 8 metra nga A.

c) Vizato vendin gjeometrik të pikave të cilat janë të larguara 6 metra nga muri BC.

ç) Shëno pozitën e pemës me shkronjën T.



4. **a)** Vizato pesëkëndësh.

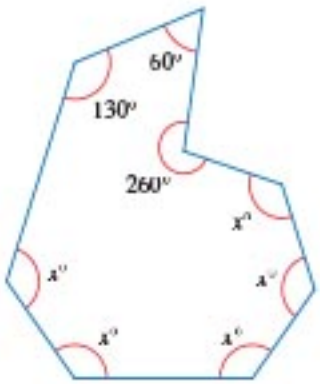
b) Vizato diagonale që ta ndash në trekëndësha.

c) Njehso shumën e këndeve të brendshme të pesëkëndëshit.

5. **a)** Shkruaje emrin matematikor të 2D-formës në vizatim.

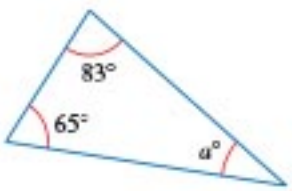
b) Njehsoje shumën e këndeve të brendshme të 2D-formës në vizatim.

c) Shfrytëzoje rezultatin nën **b)** që të njehsosh madhësinë e këndit $x°$.

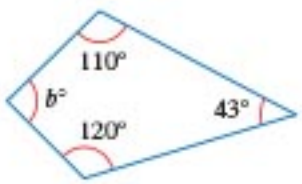


6. Sipas të dhënave në vizatimet, njehsoje madhësinë e këndeve të shënuara me shkronja.

a)



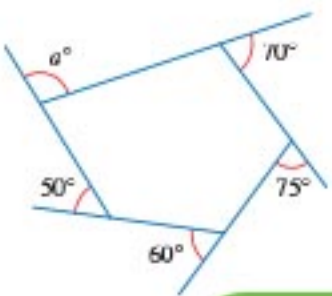
b)



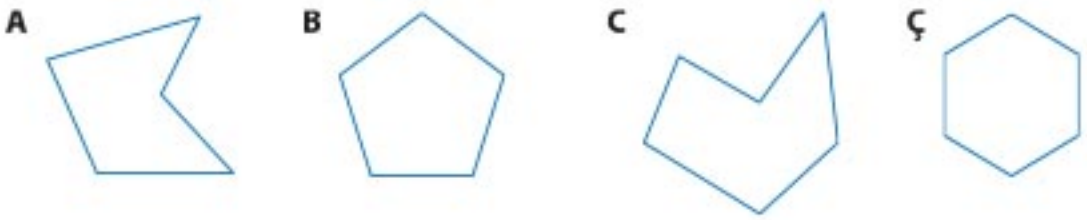
7. **a)** Përshkruaj dhe plotëso pohimin:

Shuma e këndeve të jashtme në shumëkëndësh është _____.

b) Njehsoje madhësinë e këndit $a°$ sipas të dhënave në vizatim.



8. Janë dhënë katër shumëkëndësha.



Përshkruaj dhe plotëso me shkronjat e emërtuara që të fitosh gjykim të saktë:

a) _____ dhe _____ janë pesëkëndësha.

b) _____ dhe _____ janë shumëkëndësha jokonveks.

c) _____ dhe _____ janë shumëkëndësha të rregullt.

ç) _____ dhe _____ janë gjashtëkëndësha.

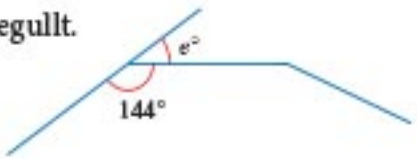
9. Shkruaj emrin tjetër matematikor të katërkëndëshit të rregullt.

10. Njehsoje madhësinë e këndit të jashtëm të shumëkëndëshit të rregullt me:

a) 6 brinjë **b)** 9 brinjë **c)** 12 brinjë **ç)** 24 brinjë.

11. Njehsoje madhësinë e këndit të brendshëm të shumëkëndëshave të dhënë në detyrën 10.

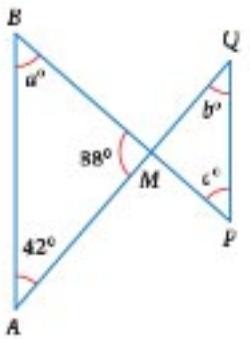
12. Në vizatim është paraqitur pjesë e shumëkëndëshit të rregullt.



a) Njehsoje madhësinë e këndit e^0.

b) Sa brinjë ka gjithsej ky shumëkëndësh?

13. Në vizatimin $\overline{AB}$ është paralele me $\overline{PQ}$.



Njehsoje madhësinë e:

a) $\sphericalangle ABM$

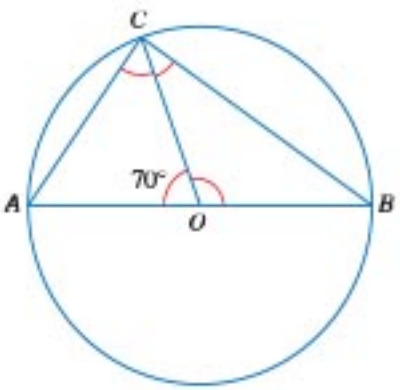
b) $\sphericalangle PQM$

c) $\sphericalangle MPQ$

14. A, B dhe C janë pika të vijës rrethore.

O është qendër e vijës rrethore.

$\sphericalangle AOC = 70^0$



a) I cilit lloj është trekëndëshi AOC?

b) Njehsoje madhësinë e $\sphericalangle ACO$.

c) Njehsoje madhësinë e $\sphericalangle COB$.

ç) Njehsoje madhësinë e $\sphericalangle BCO$.

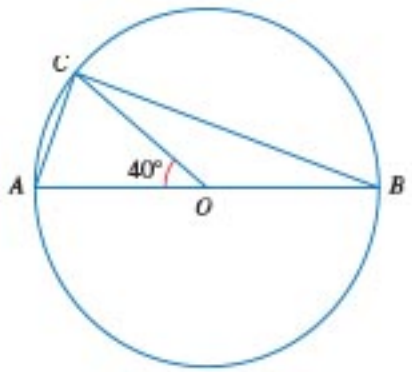
d) Njehsoje madhësinë e $\sphericalangle ACB$.

15. Në vizatim është paraqitur vijë rrethore sikur ajo në detyrën 14.

Por në këtë rast $\sphericalangle AOC = 40°$

Sipas vizatimit, përsëri përgjigju në kërkesat prej **a)** deri në **d)** të detyrës 14.

Çfarë vëren për $\sphericalangle ACB$ në këtë rast?



Kjo detyrë është shembull për një rregull të përgjithshme:
Nëse trekëndëshi ABC ka kulmet në një vijë rrethore dhe $\overline{AB}$ është diametër i vijës rrethore, atëherë këndi ACB është kënd i drejtë.

16. Njehsoje këndin e brendshëm të dhjetëkëndëshit të rregullt.

Sqaro përse nuk është e mundur të vizatohet mozaik i rregullt prej dhjetëkëndëshit.

17. **a)** Vizato vijë rrethore me rreze 5 cm.

b) Konstrukto tetëkëndësh të rregullt të brendashkruar në vijë rrethore.

18. Përdor vizore dhe kompas për ta konstruktuar 2D-formën e dhënë.



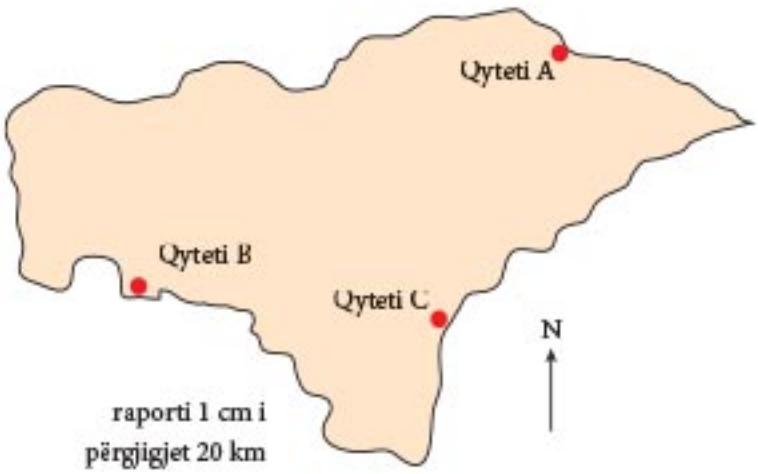
19. Shënoji në formë raporti:

a) 1 cm i përgjigjet 10 km **b)** 1 cm i përgjigjet 250 m **c)** 2 cm i përgjigjet 1 km

20. Është dhënë raporti i hartës, 1 : 400000.

Çfarë distance është paraqitur me 1 cm?

21. Harta në vizatim paraqet një ishull.



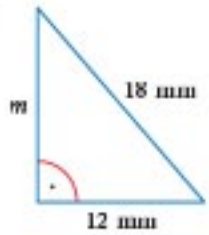
a) Njehso distancën dhe azimutin prej qytetit B deri te qyteti A.

b) Njehso distancën dhe azimutin prej qytetit C deri te qyteti B.

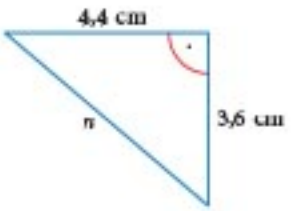
Rrumbullakoji zgjidhjet në 3 shifra të rëndësishme, përveç nëse nuk është potencuar ndryshe në detyra.

22. Njehsoji gjatësitë e shënuara me shkronja te trekëndëshat kënddrejtë.

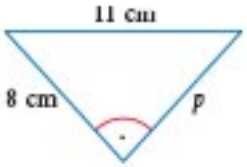
a)



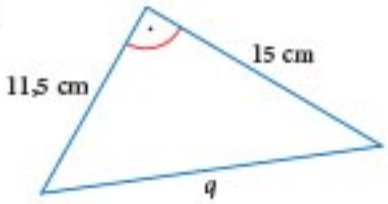
b)



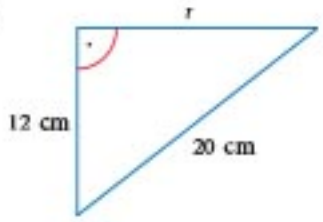
c)



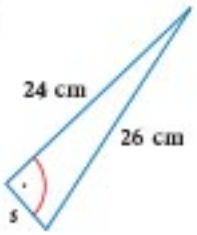
ç)



d)

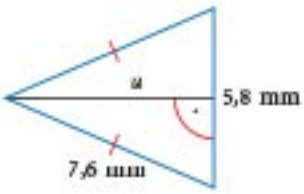


dh)

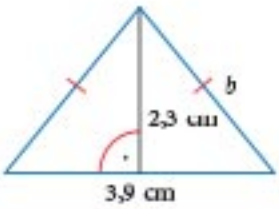


23. Njehsoji gjatësitë e shënuara me shkronja te trekëndëshat barakrahës.

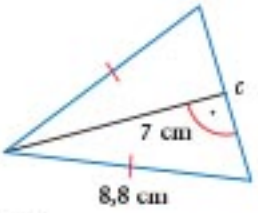
a)



b)

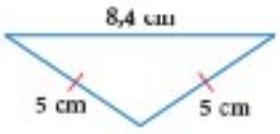


c)

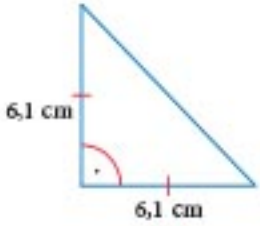


24. Njehsoji syprinat e trekëndëshave barakrahës të paraqitura më poshtë.

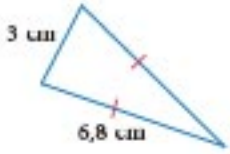
a)



b)



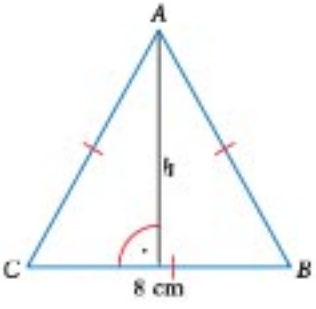
c)



25. ABC është trekëndësh barabrinjës.

a) Njehsoje lartësinë h.

b) Njehsoje syprinën e trekëndëshit ABC.

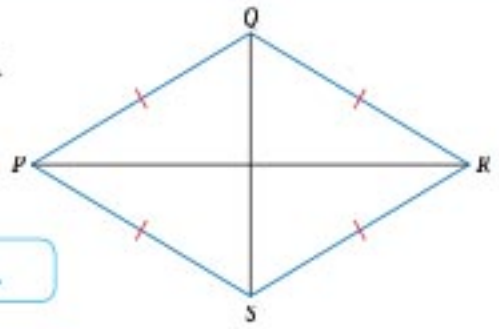


26. $PQRS$ është romb.

Në vizatim janë tërhequr diagonalet $\overline{QS}$ dhe $\overline{PR}$.

$\overline{QS} = 8$ cm dhe $\overline{PR} = 12$ cm.

Njehsoje gjatësinë e brinjës së rombit.



Diagonalet e rombit priten nën kënd të drejtë.

27. Një anije nis udhëtimin duke lundruar 75 kilometra në veri dhe pastaj 150 kilometra në perëndim.

Sa është larg anija prej vendnisjes?

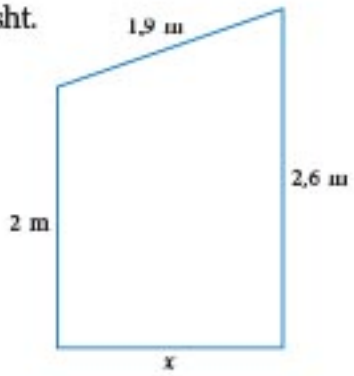
28. Në vizatim është treguar projeksioni anësor i garazhit në kopsht.

Garazhi ka lartësinë 2,6 metra përpara dhe 2 metra prapa.

Tehu i pjerrtë i kulmit është i gjatë 1,9 metra.

Njehso gjerësinë e garazhit të shënuar me shkronjën x.

Rezultatin rrumbullakoje deri në centimetrin më të afërt.



29. Një anije lundron 154 kilometra në veri, pastaj 76 kilometra në lindje dhe pastaj 87 kilometra në jug.

Sa është tani larg anija prej vendnisjes?

Rezultatin rrumbullakoje deri në kilometrin më të afërt.

9 Matja dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Zgjidh probleme në lidhje me shpejtësinë mesatare.
- Shpreh ndryshore përmes ndryshoreve të tjera në barazinë e dhënë; nxjerr formula të thjeshta; përdor formula nga matematika dhe lëndë të tjera.
- Rrumbullakon numra deri në numër të caktuar vendesh dhjetore; rrumbullakimin e përdor për të arritur deri në zgjidhjen e problemit me shkallë të caktuar saktësie.
- Zgjidh probleme në lidhje me matjen në kontekste të ndryshme.
- Përdor masë në njësi të ndryshme matëse për krahasime nga kontekste të përditshmërisë, për shembull grafike për udhëtim dhe për vlerë të parave.
- Në mënyrë precize identifikon, organizon, prezanton dhe interpreton informata në formë të shkruar, tabelare, grafike dhe me diagram.
- Njehson gjatësi të segmenteve, syprinë dhe vëllim te prizmat dhe cilindrat drejtkëndore.

9.1 Shpejtësia mesatare

Më shpejt se shpejtësia e zërit

Në dhjetor të vitit 1898 u arrit rekordi i parë botëror në shpejtësinë e vozitjes në Tokë.

Gaston de Çaselup-Lubat nga Franca u shpall rekorderi i parë botëror.

Fitoi me shpejtësi prej 63,15 km/h.

Pothuajse 100 vite më vonë, në vitin 1997, në shkretëtirën Blek Rok në ShBA u arrit shpejtësia rekorde prej 1227,986 km/h.

Për të parën herë automjet në Tokë ka lëvizur me shpejtësi më të madhe se shpejtësia e zërit.



Shpejtësia konstante

Shpejtësia është një nga madhësitë përmes të cilave mund ta përshkruajmë lëvizjen.

Kur lëvizim me shpejtësi konstante (të njëjtë) rruga e kaluar është në përpjesëtim të drejtë me kohën e kaluar.

Detyrat në lidhje me shpejtësinë mund t'i zgjidhim me ndihmën e përpjesëtimit.

Shembulli 1

Një automobil lëviz me shpejtësi konstante.

Kaloi 165 km për 3 orë.

Njehsoje shpejtësinë e automobilit në km/h.

Shpejtësia në km/h paraqet rrugën (kilometrat) e kaluar për 1 orë.

Për 3 orë automobili kaloi 165 km.

Për 1 orë automobili ka kaluar $165 : 3 = 55$ km. Pjesëtojmë me 3 për të gjetur rrugën e kaluar për 1 orë

Shpejtësia është 55 km/h.

Zgjidhim në mënyrë të njëjtë sikur te metoda njësi për përpjesëtim të drejtë.

Shpejtësia mesatare

Nga shembulli i mësipërm mund të shohim se lidhja mes madhësive shpejtësi, rrugë dhe kohë është:

$$\text{shpejtësia} = \frac{\text{rruga}}{\text{koha}}$$

Por, rrallë njerëzit udhëtojnë me shpejtësi konstante.

Prandaj përdorim **shpejtësi mesatare**, të cilën e njehsojmë për tërë rrugën e përshkruar.

$$\text{Shpejtësia mesatare} = \frac{\text{rruga e përgjithshme e kaluar}}{\text{koha e përgjithshme}}$$

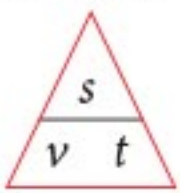
Nëse marrim që shpejtësia v = shpejtësia mesatare, s = rruga e përgjithshme e kaluar, t = koha e përgjithshme për të kaluar tërë rrugën, atëherë formula është:

$$v = \frac{s}{t}$$

Prej kësaj formule mund ta shprehim s ose t. Formulat e reja janë:

$$s = v \cdot t \qquad \text{dhe} \qquad t = \frac{s}{v}$$

Trekëndëshi mund të ndihmojë për mbajtjen në mend të formulës



Për të gjetur formulën për shpejtësi, e mbulojmë shkronjën v.



Trekëndëshi tani tregon $\frac{s}{t}$. Domethënë $v = \frac{s}{t}$

Nëse e mbulojmë shkronjën t, trekëndëshi tregon $\frac{s}{v}$, domethënë $t = \frac{s}{v}$

Nëse e mbulojmë shkronjën s, trekëndëshi tregon vt, domethënë $s = vt$.

$s = vt$ është njëjtë si $s = v \cdot t$.

Shembulli 2

Një veture-lodër i duhen 12 sekonda për të kaluar 96 cm.

Njehsoje shpejtësinë mesatare të saj në cm/s.

Koha e kaluar $t = 12$ dhe rruga e kaluar $s = 96$

Me formulën, fitojmë: $v = \frac{s}{t}$

$$v = \frac{96}{12}$$
$$= 8$$

Shpejtësia mesatare është 8 cm/s.

Shndërrimi i orëve në minuta dhe e kundërta

Kohët 3 orë e 30 minuta, 3,5 orë dhe $3\frac{1}{2}$ orë janë të barabarta.

Nganjëherë është e nevojshme të bëjmë shndërrim mes tyre.

Deri tani mësuam të shndërrojmë thyesa në numra dhjetorë dhe numrat dhjetorë në thyesa.

Për të shndërruar minutat në orë, pjesëtojmë me 60.

Për të shndërruar orët në minuta, shumëzojmë me 60.

E shumëzojmë vetëm pjesën dhjetore ose pjesën minute të kohës. Numri i plotë i orëve ngel i njëjtë.

Shembulli 3

a) Shndërro 1 h 18 min në numër dhjetor.

b) Shndërro 4,7 orë në orë dhe minuta.

a) Numri i plotë do të ngelë i njëjtë.

$18 \text{ minuta} = \frac{18}{60} \text{ orë}$

$= 0{,}3 \text{ orë}$

Domethënë, 1 h 18 min = 1,3 orë.

b) 4,7 orë janë 4 orë dhe 0,7 orë.

$0{,}7 \text{ orë} = 0{,}7 \cdot 60 \text{ minuta}$

$= 42 \text{ minuta}$

4,7 orë = 4 h 42 min

Shembulli 4

Një tren kalon rrugën prej 168 km nga Shkupi në Gjevgjeli me shpejtësi mesatare 70 km/h. Njehso kohën e udhëtimit në orë dhe minuta.

$s = 168$ dhe $v = 70$

Me formulën $t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{168}{70}$

$= 2{,}4$

Koha e udhëtimit është = 2,4 orë

= 2 orë dhe 0,4 orë

= 2 orë dhe $0{,}4 \cdot 60$ minuta

= 2 orë e 24 minuta

Detyra

1. Gjeje shpejtësitë mesatare:

a) 150 km për 3 orë. (në km/h)

b) 100 m për 10 sekonda. (në m/s)

c) 2475 km për 9 orë. (në km/h)

ç) 27 km për 6 orë. (në km/h)

d) 16,5 km për 3 h 18 min. (në km/h)

dh) 23 km për 20 min. (në km/h)

2. Njehso rrugën e përshkruar (kaluar), nëse janë dhënë shpejtësia mesatare dhe koha:

a) 85 km/h për 4 orë.

b) 435 km/h për 6,5 orë.

c) 23 m/s për 24 sekonda.

ç) 96 km/h për $3\frac{1}{2}$ orë.

d) 75 cm/s për 0,8 sekonda.

dh) 125 km/h për 4 h 54 min.

3. Njehso kohën të nevojshme për të përshkruar:

a) 1150 km me 75 km/h.

b) 160 km me 64 km/h.

c) 84 m me 28 m/s.

ç) 22,5 km me 3,75 km/h.

d) 3750 km me 600 km/h.

dh) 19 km me 4 km/h

4. Një tren kalon 130 km për $2\frac{1}{2}$ orë. Njehsoje shpejtësinë mesatare të tij.

5. Distanca nga Londra deri në Madrid është 1260 km.
Aeroplani kalon rrugën nga Londra në Madrid për 2 h 15 min.
Njehsoje shpejtësinë mesatare të aeroplanit.

6. Jana me biçikletë kaloi rrugën prej 27,3 km me shpejtësi mesatare 6,5 km/h.
Njehso, në orë dhe minuta, për sa kohë ka kaluar këtë rrugë.

7. Biçiklisti kaloi rrugën prej 209 km për 43 orë e 48 minuta.
Cakto shpejtësinë mesatare të tij.

8. Një aeroplan fluturon 2 orë e 24 minuta me shpejtësi prej 360 km/h.
Njehso sa kilometra do të kalojë për këtë kohë.

9. Automobili lëviz me shpejtësi prej 84 km/h për kohën prej $1\frac{1}{2}$ orë, kurse pastaj lëviz 2 orë me shpejtësi prej 66 km/h.
Njehso tërë rrugën e kaluar.

10. Një tren kaloi rrugën e gjatë prej 144 km me shpejtësi prej 80 km/h dhe pastaj vazhdoi rrugën edhe 130 km me shpejtësi prej 50 km/h.
Njehsoje shpejtësinë mesatare të lëvizjes së trenit.

Fillimisht njehso distancën e përgjithshme dhe kohën e përgjithshme.

11. Automobili dhe biçikleta fillojnë lëvizjen njëkohësisht nga i njëjti vend.
Lëvizin nëpër rrugë të njëjtë për kohën prej $3\frac{1}{2}$ orë.
Shpejtësia mesatare e automobilit është 56 km/h, kurse shpejtësia mesatare e biçikletës është 16 km/h.
Njehso distancën mes tyre pas $3\frac{1}{2}$ orë.

Njehso sa rrugë ka kaluar secili prej tyre.

12. Mateu ec në këmbë 12 km nga shtëpia e tij deri në shtëpinë e shokut të tij, me shpejtësi mesatare prej 6 km/h.
Shpejtësia mesatare e tij deri në shtëpinë e shokut dhe kthimit prapa në shtëpi të vet është 4 km/h.
Sa kohë në këmbë i nevojiten për t'u kthyer në shtëpi?

Njehso sa rrugë ka kaluar në të dy rastet. Së pari, njehso kohën e nevojshme për të arritur në shtëpinë e shokut. Pastaj njehso kohën e përgjithshme deri te shtëpia e shokut dhe prapa deri në kthimin në shtëpi.

9.2 Njësitë matëse të nxjerra

Njësi matëse e nxjerrë është ajo njësi e cila përfshin dy madhësi të ndryshme.

Shpejtësia mesatare është shembull për njësi të përbërë meqenëse ajo shpreh rrugën e kaluar për kohë të caktuar.

Shembuj të tjerë për njësi të nxjerrë:

- shtypja, e matur me njutn në metër katror.
- rrjedhja e lëngut, e matur me litra në sekondë.
- çmimi i mallit, i matur në denarë për gram ose në denarë për litër.

Ekzistojnë edhe shumë tjera.

Shumë njësi të nxjerra përfshijnë fjalën "për" ose "në".

Kjo tregon se një madhësi pjesëtohet me tjetër.

Shembulli 1



Detergjenti shitet në dy shishe të ndryshme.

Detergjenti A ka 1,6 litra dhe kushton 288 denarë.

Detergjenti B ka 3 litra dhe kushton 495 denarë.

Njehso çfarë është më e leverdishme, të blihet detergjenti A apo detergjenti B.

Në njehsimet, zgjidhjet rrumbullakoji me 4 vende dhjetore.

Mënyra e parë: Do ta gjejmë çmimin më të ultë për një litër.

Detergjenti A shitet me çmim 288 denarë për 1,6 litra.

Çmimi për 1 litër = 288 : 1,6 = 180

Çmimi i 1 litri nga detergjenti A është 180 denarë.

Detergjenti B shitet me çmim 495 denarë për 3 litra.

Çmimi për 1 litër = 495 : 3 = 165

Çmimi i 1 litri nga detergjenti B është 165 denarë.

Detergjenti B shitet nga 165 denarë për 1 litër, domethënë është më e leverdishme të blihet detergjenti B.

Mënyra e dytë: Do ta gjejmë sasinë më të madhe në litra për një denar.

1,6 litra nga detergjenti A shitet për 288 denarë.

Litra për 1 denar = 1,6 : 288 = 0,0056 (e rrumbullakuar në 4 vende dhjetore)

0,0056 litra nga detergjenti A shiten për 1 denar.

3 litra nga detergjenti B shiten për 495 denarë.

Litra për një denar = 3 : 495 = 0,0061 (e rrumbullakuar në 4 vende dhjetore)

0,0061 litra nga detergjenti B shiten për 1 denar.

Me detergjentin B fitohet sasi më e madhe për 1 denar, domethënë është më e leverdishme të blihet detergjenti.

Zbatimi i grafikëve

Në vizatim është paraqitur një **grafik i rrugës së përshkruar (rrugë-kohë)**.

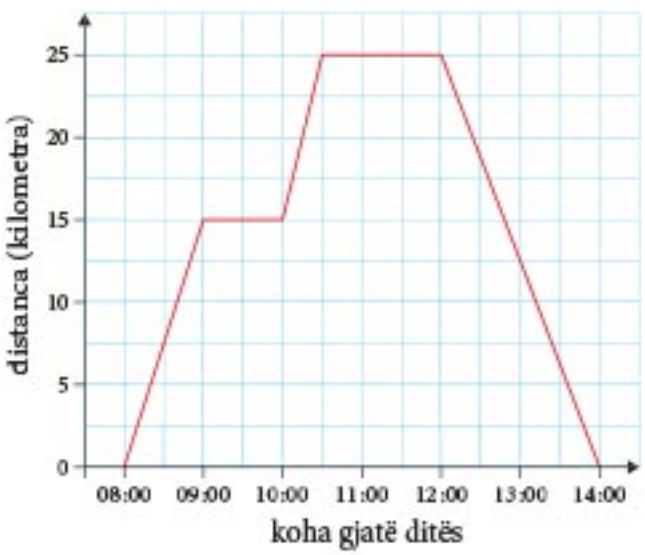
Grafiku paraqet lëvizjen e Svetlanës me biçikletë.

Ajo u nis nga shtëpia në ora 8:00, kurse u kthye në ora 14:00.

Nga grafiku mund të njehsojmë shpejtsinë e saj ndërmjet 8:00 dhe 9:00.

Ka kaluar rrugën prej 15 km për 1 orë. Shpejtësia e saj në atë kohë ishte 15 km/h.

Sa ka qenë shpejtësia mesatare e saj?



Svetlana ka vozitur 25 km dhe pastaj u kthye në shtëpi. Rrugën e përgjithshme që kaloi është 50 km. Gjatë ditës ka pushuar $2\frac{1}{2}$ orë, kurse ka vozitur $3\frac{1}{2}$ orë.

Shpejtësia mesatare e lëvizjes është 50 : 3,5 = 14,29 km/h (e rrumbullakuar në 2 vende dhjetore).

Shembulli 2

Petri në gazetë vërejti reklamë me oferta speciale nga ana e dy kompanive për telefoni mobile, "M" dhe "T".



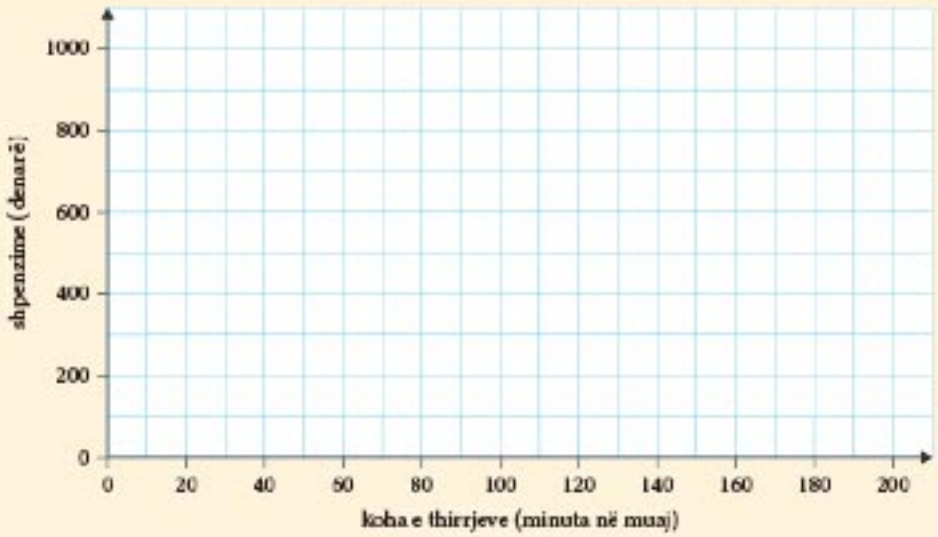
a) Paraqiti të dy ofertat në sistemin koordinativ.

Në boshtin horizontal do ta paraqesim kohën e thirrjeve deri në 200 minuta në muaj.

Në boshtin vertikal do t'i paraqesim shpenzimet deri në 1000 denarë.

b) Pas sa minutash në muaj oferta e "M" është më e leverdishme?

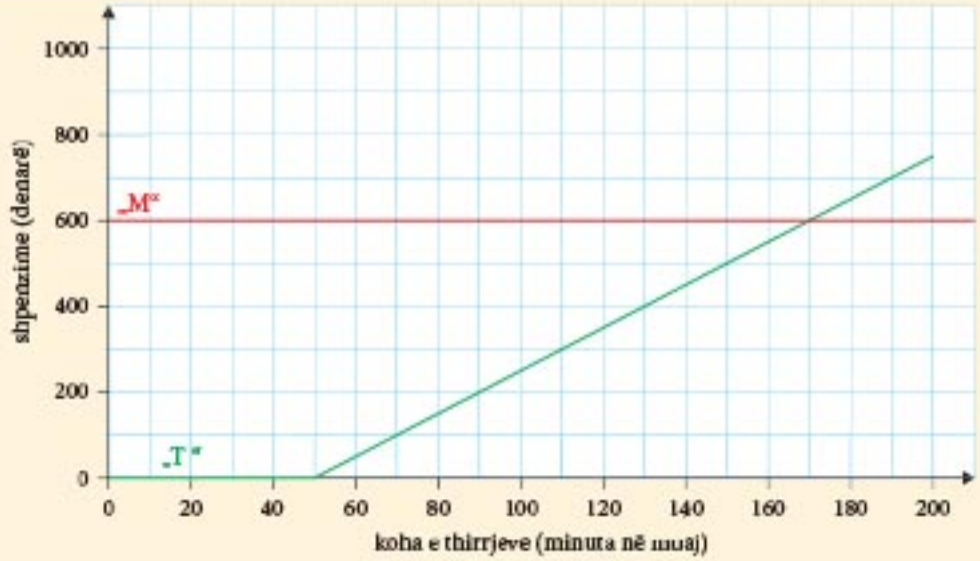
a) Ta vizatojmë sistemin koordinativ.



Në tabelë janë paraqitur shpenzimet e secilës kompani për numër të ndryshëm minutash në muaj.

Koha (minuta)	0	30	60	100	150	200
Shpenzime me "M"	600	600	600	600	600	600
Shpenzime me "T"	0	0	50	250	500	750

I shënojmë pikat në sistemin koordinativ dhe i lidhim me segmente.



b) Grafiku paraqet dy drejtëza që priten në minutën e 170 në muaj.

Majtë nga kjo pikë më e ultë është drejtëza e gjelbër, prandaj "T" është më e lirë.

Djathë prej kësaj pike më e ultë është drejtëza e kuqe, prandaj "M "është më e lirë.

Oferta e kompanisë "M" është më e leverdishme nëse bisedohet më tepër se 170 minuta në muaj.

Detyra

1. Ushqimi për macet shitet në dy paketime të ndryshme.



Paketimi prej 420 g shitet për 63 denarë, kurse paketimi prej 600 g shitet për 99 denarë.

Njehso çfarë është më e leverdishme të blihet, paketimi më i vogël apo paketimi më i madh?

2. Vaji për ushqim shitet në tre paketime të ndryshme.

500 ml kushtojnë 159 denarë

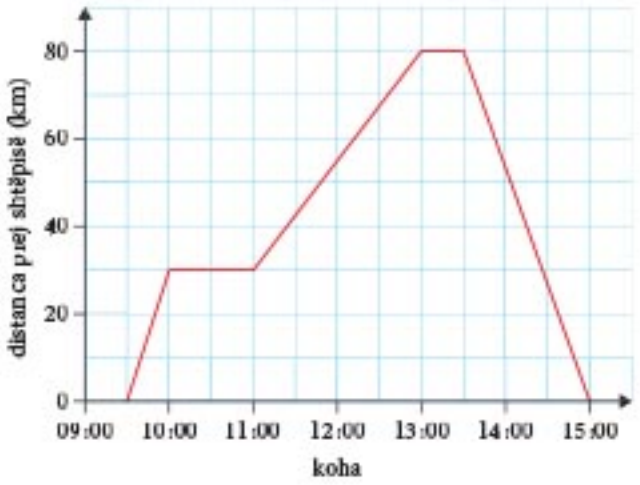
1 litër kushton 299 denarë

2,4 litra kushtojnë 724 denarë

Njehso cili paketim është më i leverdishëm për blerje.

Trego tërë procedurën.

3. Krenari doli nga shtëpia në ora 9:30 për të vizituar vendin që është larg shtëpisë së tij 80 km. Grafiku tregon lëvizjen e tij atë ditë.



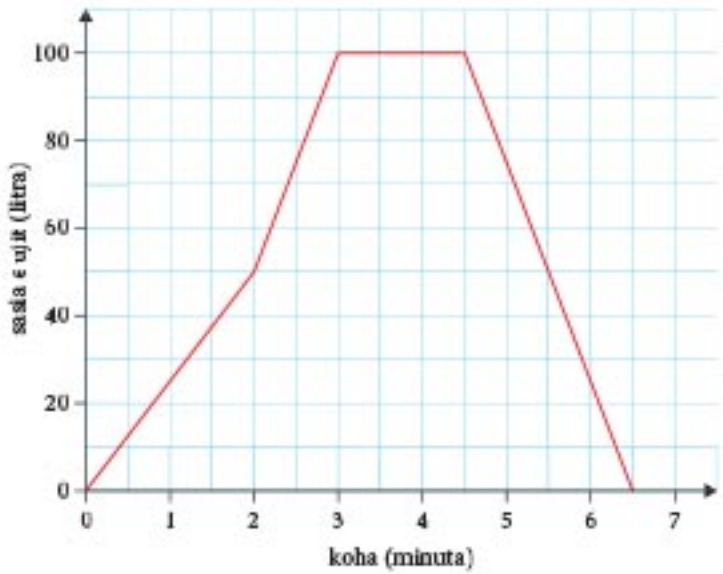
a) Njehsoje shpejtësinë e tij ndërmjet 11:00 dhe 13:00.

b) Në cilën pjesë të udhëtimit ai ka lëvizur më shpejt? Si do ta caktosh?

c) Njehsoje shpejtësinë mesatare të tij për tërë ditën.

4. Shitorja A ofron këtë ofertë speciale: 1,5 kg miell shitet për 46 denarë.
Në shitoren B një thes prej 25 kg prej miellit të njëjtë shitet për 750 denarë.
Cila shitore ka çmimin e miellit më të lirë, shitorja A apo shitorja B?

5. Në grafikun më poshtë është paraqitur sasia e ujit në kazan kur mbushet dhe pastaj kur zbrazet.



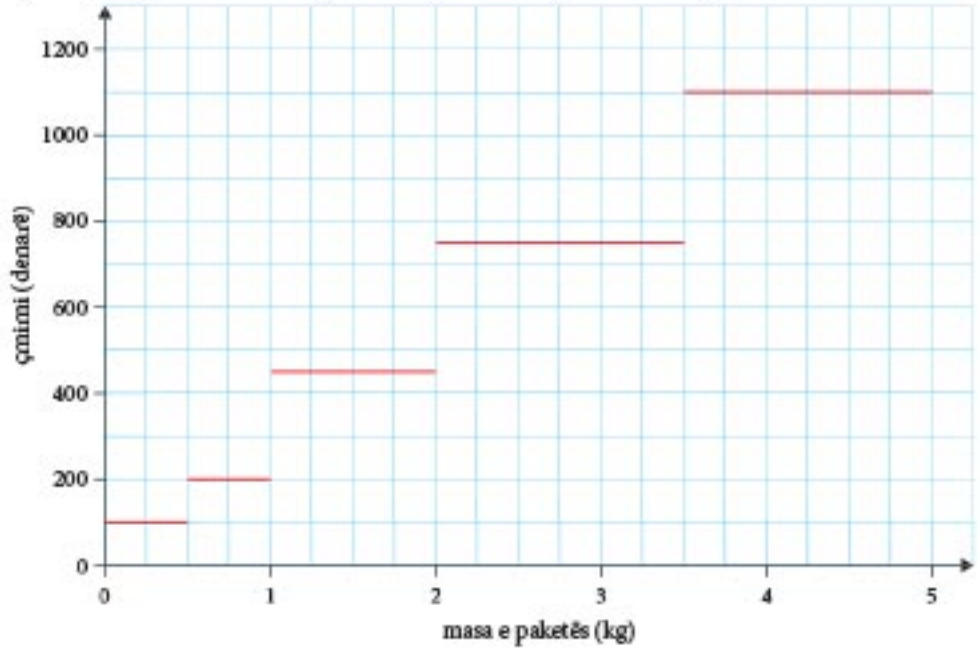
a) Sa litra ujë ka në kazan kur është përplot?

b) Me sa sasi uji është mbushur kazani në 2 minutat e para?

c) Njehsoje shpejtësinë e derdhjes në 2 minutat e para në litra në minutë.

ç) Njehsoje shpejtësinë e derdhjes kur kazani zbrazet në litra në minutë.

6. Grafiku paraqet çmimin e dërgesës së paketave përmes kompanisë X.



Nga grafiku mund të lexohet, për shembull, se për dërgesë të paketave deri në 500 g paguhet 100 denarë.

a) Shëno shpenzimet për dërgesë të paketimeve me masat e dhëna përmes kompanisë X.

i 900 g **ii** 1,4 kg **iii** 3,4 kg **iv** 3,75 kg

Kompania Y ofron çmim fiks prej 250 denarë për kilogram masë.

Dërgesa e paketës me masë 3,1 kg do të kushtonte $3{,}1 \cdot 250 = 775$ denarë.

b) Njehso shpenzimet për dërgim të katër paketave të dhëna në nën a) përmes kompanisë Y.

c) Për secilën paketë, shkruaj cila kompani është më e lirë dhe për sa.

7. Dendësia e 3D-formës është njësi mase e përbërë e masës relative.

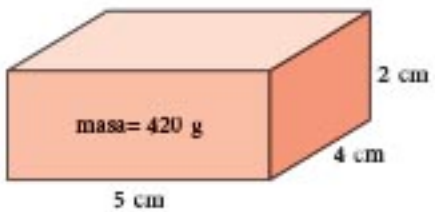
Dendësia njehsohet me pjesëtimin e masës në gram me vëllimin në cm^3.

Njësia për dendësinë është g/cm^3.

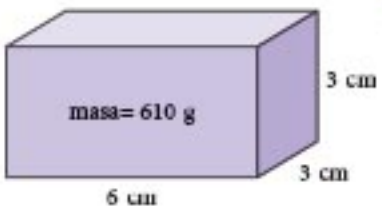
a) Njehso dendësinë e trupave të dhënë në formë kuadri në g/cm^3.

vëllimi = gjatësia · gjerësia · lartësia

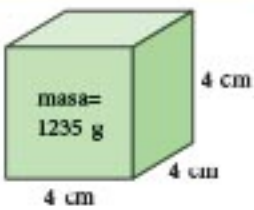
i



ii



iii



Në tabelë janë paraqitur dendësitë e disa metaleve.

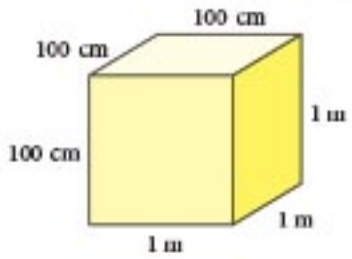
Aluminiumi	Kromi	Bakri	Ari	Hekuri	Plumbi	Argjend	Titaniumi
2,7 g/cm³	7,15 g/cm³	8,96 g/cm³	19,3 g/cm³	7,86 g/cm³	11,3 g/cm³	10,49 g/cm³	4,51 g/cm³

b) Shëno prej cilit lloj metali është i ndërtuar secili prej kuadrove.

Konstato cili metal ka dendësi të afërt me zgjidhjen për secilin kuadër të paraqitur nën a).

9.3 Vëllimi

Njësitë matëse të vëllimit



Dimensionet e kubit në vizatim janë 1 metër, 1 metër dhe 1 metër.

Vëllimi i tij është $1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^3$

Dimensionet e kubit po ashtu janë 100 cm, 100 cm dhe 100 cm.

Vëllimi i tij është $100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 1000000 \text{ cm}^3$

Domethënë, $\mathbf{1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3}$

Nëse i marrim dimensionet e kubit në milimetra, vëllimi është
$1000 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm} = 1000000000 \text{ mm}^3$.

Domethënë, 1 miliardë milimetra kub janë të barabarta me 1 metër kub.

$\mathbf{1 \text{ m}^3 = 1000000000 \text{ mm}^3}$

Kur shndërrojmë njësitë matëse të vëllimit, njehsojmë kubin e koeficientit për shndërrim të gjatësisë.

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$

Kështu, $1 \text{ km}^3 = 1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m} = 1000000000 \text{ m}^3$

Shembulli 1

Shndërro.

a) $5{,}3 \text{ m}^3$ në cm^3 **b)** 12 cm^3 në mm^3 **c)** 4500000 cm^3 në m^3

a) $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

Ky është koeficienti për shndërrimin e gjatësisë

$1 \text{ m}^3 = 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 1000000 \text{ cm}^3$

Ky është koeficienti për shndërrimin e vëllimit.

$5{,}3 \text{ m}^3 = 5{,}3 \cdot 1000000 = 5300000 \text{ cm}^3$

b) $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

$1 \text{ cm}^3 = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 1000 \text{ mm}^3$

$12 \text{ cm}^3 = 12 \cdot 1000 = 12000 \text{ mm}^3$

c) $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

$1 \text{ m}^3 = 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 1000000 \text{ cm}^3$

$4500000 \text{ cm}^3 = 4500000 : 1000000 = 4{,}5 \text{ m}^3$

Vëllimi

Vëllimi i lëngshëm i një ene është sasia maksimale e lëngut që në atë mund të vendoset.

Vëllimi i një ene është madhësia e hapësirës që përfshin.

Enë me vëllim prej 1000 cm^3 ka vëllim të lëngshëm 1 litër.

$\mathbf{1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml}}$

$\mathbf{1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}}$

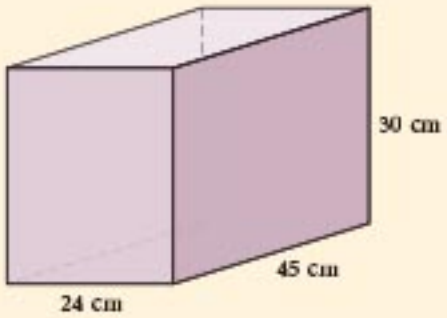
Shembulli 2

Në vizatim është paraqitur akuarium për peshq.

Akuariumi është i gjatë 45 cm, i gjerë 24 cm dhe i thellë 30 cm.

a) Njehsoje vëllimin në cm^3.

b) Njehso sasinë e lëngshme të akuariumit në litra.



a) Vëllimi = gjatësia · gjerësia · thellësia

$= 45 \cdot 24 \cdot 30$

$= 32400\ cm^3$

b) Vëllimi i lëngshëm = 32400 ml

$= 32400 : 1000$

$= 32{,}4\ l$

Akuariumi për peshq nxë 32,4 litra ujë kur është përplot.

Detyra

1. Shndërro në cm^3

a) $2\ m^3$ **b)** $5{,}6\ m^3$ **c)** $6000\ mm^3$ **ç)** $9600\ mm^3$

2. Shndërro në mm^3

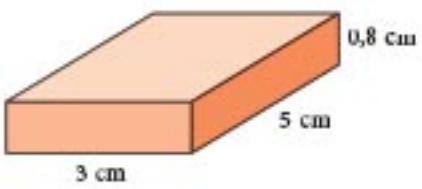
a) $3\ m^3$ **b)** $0{,}75\ m^3$ **c)** $9\ cm^3$ **ç)** $1{,}4\ cm^3$

3. Shndërro në m^3

a) $7000000\ cm^3$ **b)** $12500000\ cm^3$

4. **a)** Njehsoje vëllimin e kuadrit të dhënë në cm^3

b) Njehsoje vëllimin e kuadrit të dhënë në mm^3.



5. Njehso sa mililitra lëng nxë kuadri në detyrën 4.

6. Njehsoje vëllimin e lëngshëm në mililitra të enëve me vëllim:

a) $25\ cm^3$ **b)** $125\ cm^3$ **c)** $2500\ cm^3$ **ç)** $8000\ mm^3$

7. Vesna ka thes që përmban $1500\ cm^3$ ushqim për shpendë.

Ajo planifikon që këtë ushqim ta paketojë në kuti vogla me dimensione 6 cm, 4 cm dhe 15 mm.

a) Njehsoje vëllimin e një kutie.

b) Sa kuti të vogla mund të mbushen me ushqimin që gjendet në thes?

c) Sa ushqim do të mbetet në thes?

Kujdes, ka njësi të ndryshme matëse.

8. Kirja ka 40 kuti me lëng.

Secila kuti ka dimensionet 4 cm, 5 cm dhe 5 cm.

a) Njehsoje vëllimin e një kutie në cm^3.

b) Njehso sa litra lëng ka gjithsej ai.

9. Çokollatat "çoko" shiten në paketime të vogla.

Secili paketim ka dimensionet 15 cm, 10 cm dhe 4 cm.

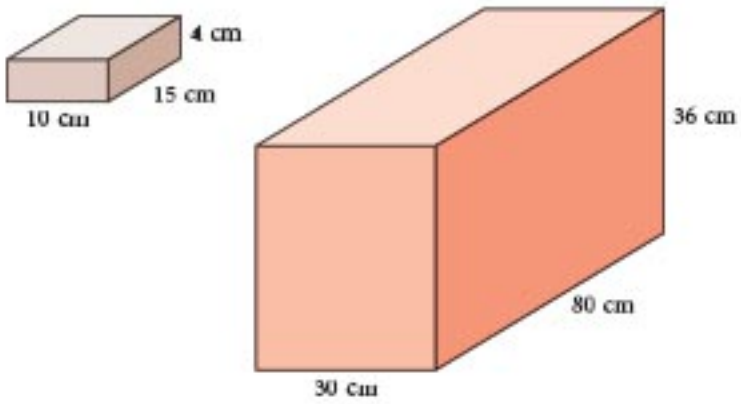
Kompania që i prodhon, paketimet i vendos në kuti më të mëdha.

Secila kuti ka dimensionet 80 cm, 30 cm dhe 36 cm.

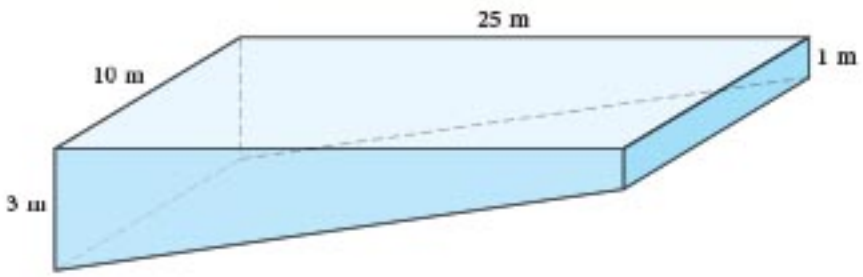
a) Njehso sa paketimet të tilla të çokollatave nxë një kuti e madhe.

Organizo renditjen e çokollatave në kutinë e madhe, ashtu që të mos ketë zbrazëtira mes tyre.

b) Vizato diagram që të tregosh si duhet të paketohen çokollatat.



10. Në vizatim është paraqitur baseni me gjatësi 25 metra.



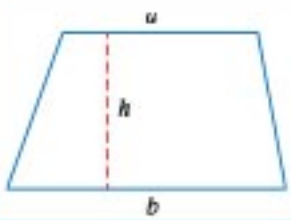
Baseni është i thellë 1 metër në pjesën më të cektë dhe 3 metra në pjesën më të thellë.

Muri anësor është në formë të trapezit.

a) Njehsoje syprinën e murit anësor në m^2.

Baseni është i gjerë 10 metra.

b) Njehsoje vëllimin e basenit në m^3.



Formula për syprinën e trapezit është
$S = \frac{1}{2}(a + b)\,h$

c) Njehsoje vëllimin e lëngshëm të basenit në litra.

Mbaj mend se 1 litër = 1000 cm^3.

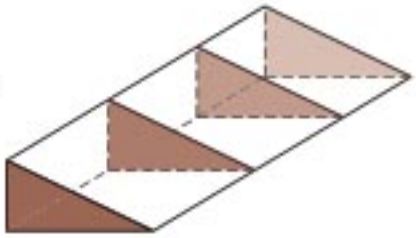
9.4 Prizmi dhe cilindri

Vëllimi i prizmit

Prizmi është 3D-formë .

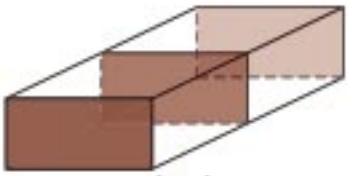
Prerjet tërthore përgjatë tërë gjatësisë së prizmit janë të barabarta.

Në vizatim është paraqitur prizmi me bazë trekëndëshe.

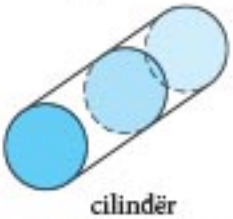


Të gjitha prerjet tërthore trekëndore të prizmit janë trekëndësha të puthitshëm.

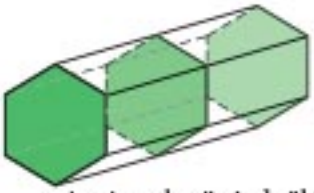
Në vizatim janë paraqitur edhe tri 3D-forma gjeometrike.



kuadër
(prizmi me bazë drejtkëndësh)



cilindër
(3D-forma me bazë rreth)



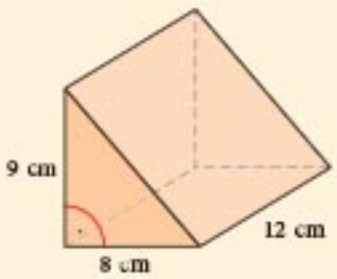
prizmi me bazë gjashtëkëndësh

Formula për njehsim të vëllimit të prizmit dhe cilindrit është:

vëllimi i prizmit / cilindër = syprina e prerjes tërthore · gjatësia

Shembulli 1

Njehsoje vëllimin e prizmit me bazë trekëndësh kënddrejtë.



Fillimisht njehsojmë syprinën e prerjes tërthore.

syprina e trekëndëshit $= \frac{1}{2} \cdot$ baza $\cdot$ lartësia përkatëse

$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$

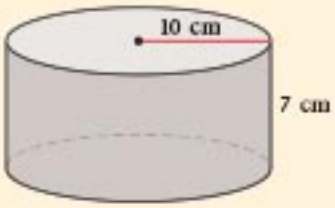
vëllimi i prizmit = syprina e prerjes tërthore · gjatësia

$= 36 \cdot 12 = 432 \text{ cm}^3$

Përdorim njësi matëse cm^3 meqenëse njehsojmë vëllim.

Shembulli 2

Njehsoje vëllimin e cilindrit të dhënë. Zgjidhjen rrumbullakoje në 2 shifra të rëndësishme.



Prerja tërthore e cilindrit është rreth.

Syprina e rrethit është πr^2.

Vëllimi i cilindrit është $V = \pi r^2 h$, ku r është rrezja, kurse h është lartësia e cilindrit.

$V = \pi r^2 h$

$= \pi \cdot 10^2 \cdot 7$

$= 2199{,}114858$ E njehsuar π me kalkulator.

$= 2200\ \text{cm}^3$ E rrumbullakuar në 2 shifra të rëndësishme.

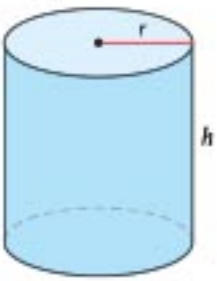
Syprina e 3D-formës

Syprinën e një 3D-formës e gjejmë si shumë prej syprinave të të gjitha mureve të 3D-formës..

Te prizmi të gjitha muret janë 2D-forma.

I njehsojmë syprinat e të gjitha mureve dhe pastaj i mbledhim.

Të shqyrtojmë procedurën për njehsim të syprinës së cilindrit.

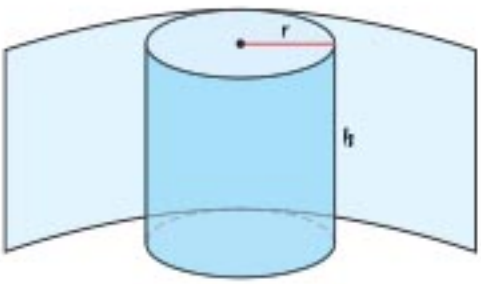


Cilindri i dhënë ka rrezen r dhe lartësinë h.

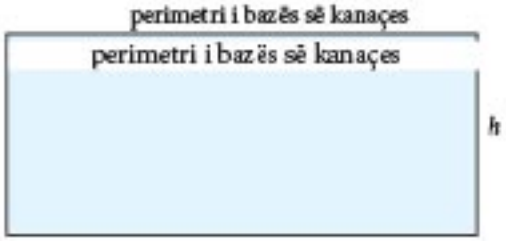
Cilindri është i përbërë prej dy bazave dhe murit anësor që është sipërfaqe e lakuar.

Syprina e bazës = πr^2.

Për njehsimin e syprinës së murit anësor, paramendojmë se cilindri është kanaçe dhe shpalojmë murin anësor duke e shtrirë në rrafsh.



Muri anësor në formë të shpaluar është drejtkëndësh.



Lartësia e drejtkëndëshit është h, kurse gjatësia e tij është e barabartë me perimetrin e vijës rrethore që është prerje e murit anësor dhe bazave të kanaçes.

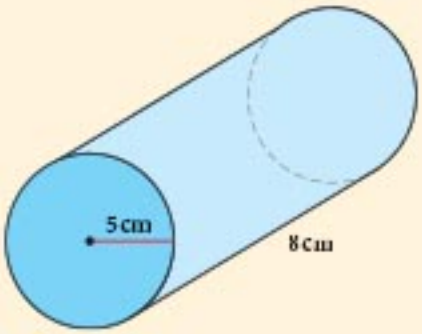
Perimetri i vijës rrethore është $2\pi r$, prandaj syprina e drejtkëndëshit është $2\pi rh$.

Syprina e cilindrit = syprina e murit anësor + syprinat e dy vijave rrethore (bazave).

Syprina e cilindrit = $2\pi rh + 2\pi r^2$

Shembulli 3

Njehsoje syprinën e cilindrit të dhënë. Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.



Syprina e njërës bazë $= \pi r^2$

$= \pi \cdot 5^2$

$= 78{,}5398$ Mos rrumbullako në 3 shifra të rëndësishme deri në zgjidhjen përfundimtare.

Syprina e bazës tjetër $= 78{,}5398$

Syprina e murit anësor $= 2\pi rh$

$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8$

$= 251{,}3274$

Njësia matëse është cm^2 meqenëse njehsojmë syprinë.

Syprina e përgjithshme $= 78{,}5398 + 78{,}5398 + 251{,}3274$

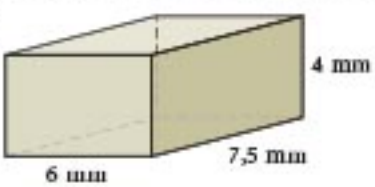
$= 408\ cm^2$ E rrumbullakuar në 3 shifrat e rëndësishme.

Detyra

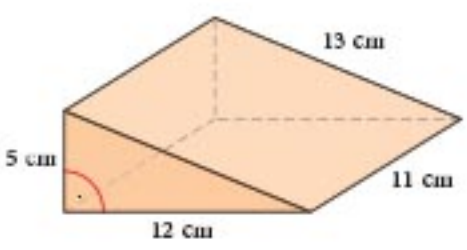
Zgjidhjet e detyrave në vijim të rrumbullakohen në 3 shifra të rëndësishme, aty ku është e domosdoshme.

1. Njehsoje vëllimin e prizmave të dhëna.

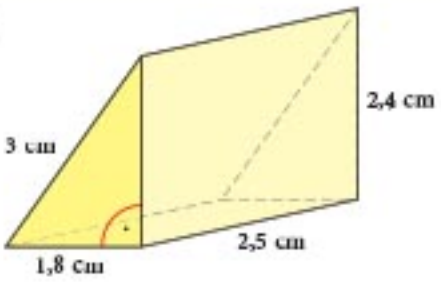
a)



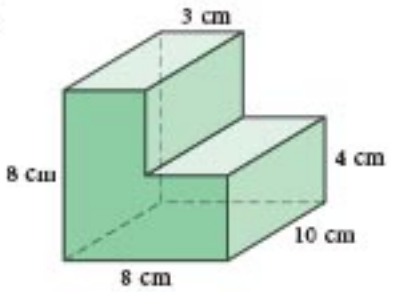
b)



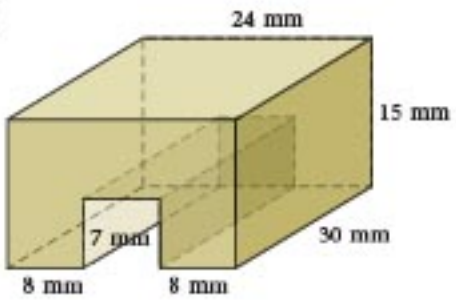
c)



ç)



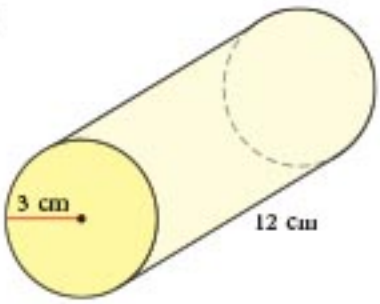
d)



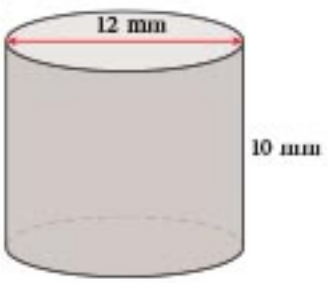
2. Njehsoje syprinën e prizmave të dhëna në detyrën **1**.

3. Njehsoje vëllimin e cilindrave të dhënë.

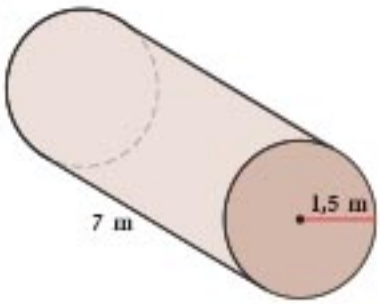
a)



b)



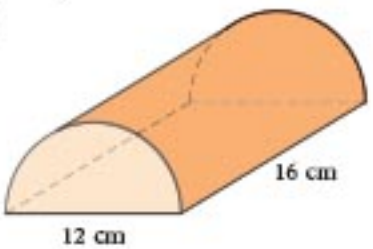
c)



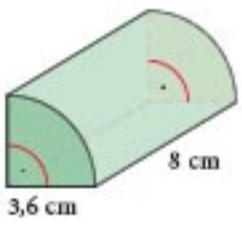
4. Njehsoje syprinën e cilindrave të dhënë në detyrën **3**.

5. Njehsoje vëllimin e 3D-formave të dhëna.

a)



b)



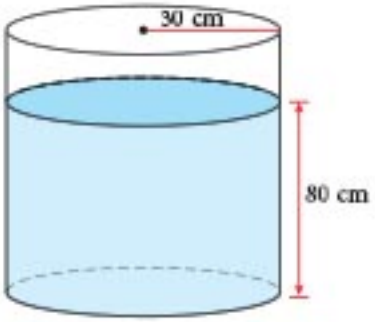
6. Njehsoje syprinën e 3D-formave të detyrës **5**.

7. Një fuçi me ujë ka formë cilindri me rreze 30 cm.
Lartësia e nivelit të ujit në fuçi është 80 cm.

a) Sa është vëllimi i ujit në fuçi?

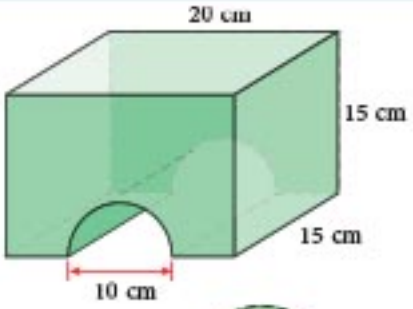
b) Sa litra ujë gjenden në fuçi?

$1\ cm^3 = 1$ mililitër



8. **a)** Njehsoje vëllimin e 3D-formës të paraqitur më vizatim.

b) Njehsoje syprinën e tij.

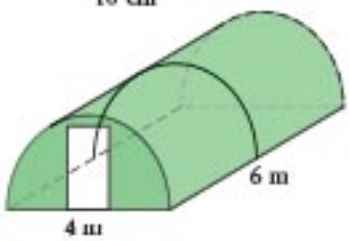


9. Në vizatim është paraqitur serra e Filipit, e ndërtuar me ndihmën e tre shiritave të hekurt.

Çdo shirit paraqet gjysmëqark.

Gjerësia e serrës është 4 metra.

a) Njehso gjatësinë e shiritave.



Filipi donte të blejë ngrohëse.

Ajo është e fuqishme të ngrohë hapësirë prej 40 m³.

b) Njehsoje vëllimin e serrës.

c) A mjafton ky trup ngrohës për ta ngrohur serrën e Filipit?

Njehsoje syprinën e një gjysmërrethi.

Pastaj shumëzoje me gjatësinë e serrës për të gjetur vëllimin.

10. Një monedhë është e trashë 3,15 mm dhe ka diametër 22,5 mm.

Koleksioneri grumbullon këto monedha dhe i vendos njëra mbi tjetrën.

Ka gjithsej 56 monedha identike.





a) Njehso lartësinë e krijuar nga këto monedha.

b) Njehsoje vëllimin e trupit të fituar nga këto monedha në cm³.

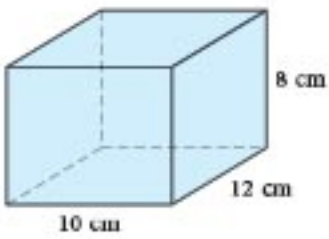
Ki kujdes në njësitë e ndryshme matëse. Shndërro gjatësitë në centimetra para llogaritjes së vëllimit.

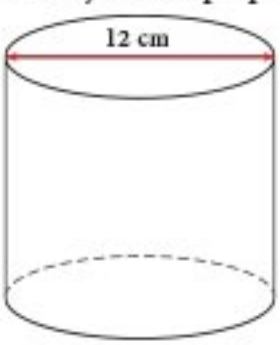
Secila monedhë ka masën 9,5 gramë.

c) Njehso masën e përgjithshme të trupit të formuar nga monedhat.

Zgjidhjen shënoje në kilogram.

11. Rezervuari në formë kuadri i paraqitur majtë është përplot me ujë.





Në fillim njehsoje vëllimin e ujit në rezervuarin në formë kuadri.

Uji derdhet në enën cilindrike të paraqitur djathtë.

Njehso deri në cilën lartësi do të arrijë niveli i ujit në cilindër.

Zgjidhjen rrumbullakoje deri në milimetrin më të afërt.

Detyra për përsëritje

1. Njehsoje shpejtësinë mesatare në km/h të automjeteve që kalojnë rrugën:

a) 210 km për $3\frac{1}{2}$ orë

b) 168 km për 4 orë

c) 17 km për 3 orë dhe 24 minuta

ç) 285 km për 3 orë dhe 48 minuta.

2. Gjeje rrugën që i kalojnë objektet duke lëvizur me:

a) 56 km/h për 6 orë **b)** 12 km/h për $4\frac{1}{2}$ h

c) 65 m/s për 12 sekonda **ç)** 250 km/h për 3 h 18 min.

3. Njehso kohën e nevojshme për të kaluar distancat e dhëna. Zgjidhjet paraqiti në orë dhe minuta.

a) 400 km me 50 km/h **b)** 135 km me 27 km/h

c) 240 km me 50 km/h **ç)** 23,5 km me 2,5 km/h

4. Kërmilli zhvendoset 23,4 metra për 30 minuta.

a) Njehsoje shpejtësinë mesatare të kërmillit në metra/orë.

b) Shndërroje shpejtësinë në metra/sekondë

5. Një tren lëviz 2h 48 min me shpejtësi mesatare 140 km/h.

Sa rrugë do të kalojë treni për atë kohë?

6. Një autobus lëviz me shpejtësi mesatare 55 km/h.

Sa kohë i nevojitet autobusit për të kaluar rrugën prej 22 km?

7. Vaji i motorëve shitet në dy paketime të ndryshme.



Paketimi i vogël ka 2 litra dhe kushton 459 denarë.

Paketimi i madh ka 4,5 litra dhe kushton 999 denarë.

Njehso çfarë është më e leverdishme të blihet, paketimi më i madh apo ai më i vogël?

8. Fasulja e zier shitet në tre paketime të ndryshme.

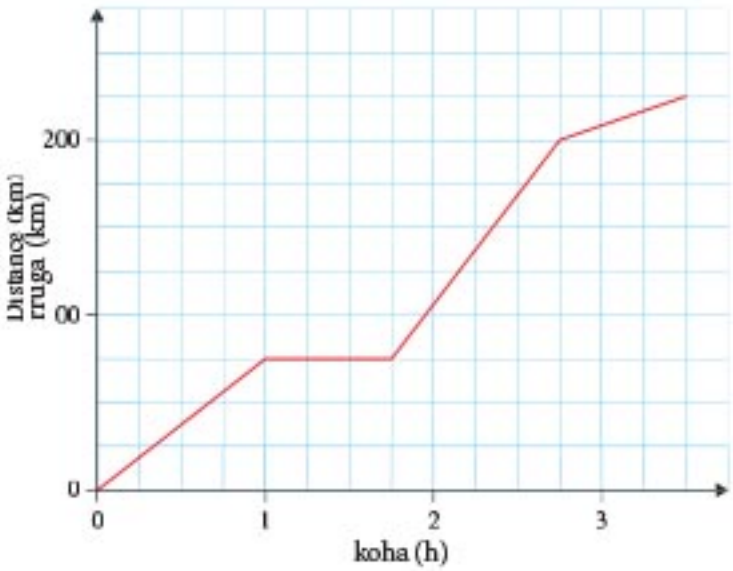


69 denarë 120 denarë 205 denarë

Njehso cili prej tyre paraqet paketim me çmim më të leverdishëm.
Trego tërë procedurën.

9. Grafiku i dhënë tregon rrugën që ka kaluar treni pas largimit nga stacioni kryesor.

Shkurt pas largimit nga stacioni kryesor treni ndaloi në semafor.



a) Sa rrugë të përgjithshme ka kaluar treni?

b) Njehsoje shpejtësinë mesatare për tërë rrugën, me kohën derisa treni ka pritur në semafor.

Shkruaje zgjidhjen të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

c) Njehsoje shpejtësinë mesatare me të cilën ka lëvizur treni, pa kohën e pritjes në semafor.

Shkruaje zgjidhjen e rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

10. Zllatko ka rezervuar që nxë 25 litra lëng.

Ai dëshiron të mbushë disa kanaçe në formë cilindri.

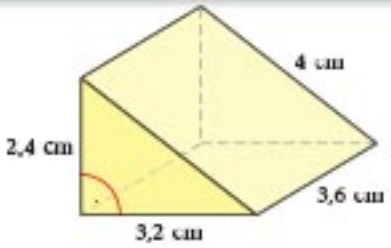
Kanaçja është me lartësi 10 cm dhe rreze 3 cm.

Zllatko do të mbushë 100 kanaçe.

Mbaj mend 1 litër = 1000 cm^3.

Njehso a ka lëng të mjaftueshëm për të mbushur 100 kanaçe.

Shpjego zgjidhjen tënde.



11. **a)** Njehsoje vëllimin e prizmit të dhënë në cm^3

b) Njehsoje vëllimin e prizmit në mm^3

12. Njehsoje syprinën e prizmit të dhënë në detyrën 11.

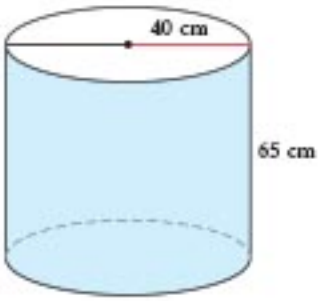
a) Zgjidhjen paraqite në cm^2.

b) Zgjidhjen paraqite në mm^2.

13. Shndërroji vëllimet e dhëna në.

a) $3\ m^3$ në cm^3 **b)** $8000\ mm^3$ në cm^3 **c)** $4\ cm^3$ në mm^3 **ç)** $3500000\ cm^3$ në m^3

14. Në vizatim është paraqitur rezervuar cilindrik për ujë.



a) Njehsoje vëllimin e tij në cm^3.

b) Njehso sasinë e lëngshme të cilindrit në litra.

Rrumbullakoje zgjidhjen deri në litrin më të afërt.

15. Njehso sasinë e lëngshme në mililitra të rezervuarit me vëllim:

a) $450\ cm^3$ **b)** $1000\ cm^3$ **c)** $5000\ mm^3$

16. Vëllimi i rezervuarit është $2\ m^3$

Sa litra nxë ky rezervuar.

10 Puna me të dhëna dhe zgjidhja e problemeve

Qëllimet mësimore

- Zgjedh, vizaton dhe interpreton diagrame, duke përfshirë:
  - diagrame te frekuencave per te dhena diskrete dhe te vazhdueshme;
  - grafik vijor per periudhe kohore;
  - diagrame me pika, për t'u zhvilluar të kuptuarit mbi korrelacionin;
  - diagramet trung-gjethe te njepasnjeshme.
- Interpreton tabela, grafik dhe diagrame me te dhena diskrete dhe te vazhdueshme, nxjerr perfundime, duke i nderlidhur te dhenat statistikore dhe ecurite me ceshtjen fillestare.
- E kupton frekuencën relative si vlerësim i gjasës dhe atë e përdor për krahasim të rezultateve nga eksperimentet në kontekst të ndryshëm.
- E di se shuma e gjasave që ndërmjet vete përjashtohen është 1 dhe e përdor këtë fakt kur zgjidh probleme me gjasa.
- I gjen dhe i evidenton gjitha rezultatet për dy ngjarje të njëpasnjëshme.

10.1 Diagramet me pika dhe korrelacioni

Pikniku dhe shitja e akullores

Frensis Galton ishte matematicient anglez i cili ka jetuar në shekullin XIX.

Ai definoi shumë ide statistikore, mes të cilave edhe korrelacionin.

Korrelacioni përfshin nevojë për përputhje dhe lidhshmëri mes madhësive.

Për shembull, gjatë kohës së nxehtë më pak përdoret energjia elektrike.

Sasia elektrike që shfrytëzohet është drejtpërdrejt e lidhur me kohën.

Gjatë kohës së nxehtë më tepër njerëz dalim nëpër piknikë dhe shitet më tepër akullorja. Ekziston përputhje mes shitjes së akullores dhe piknikut, por ato nuk janë drejtpërdrejtë të lidhura – dhe të dyja varen nga koha.





Diagrame me pika

Diagramet me pika përdoren për të paraqitur çifte të dhënash.

Pikat në sistemin koordinativ i paraqesim me simbolin "x".

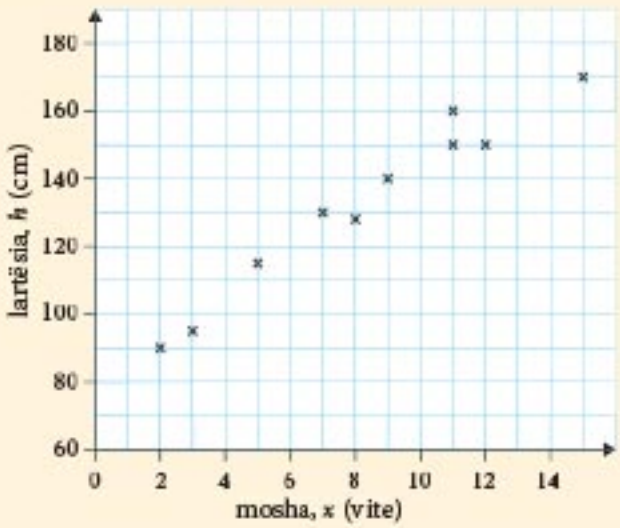
Kur vizatojmë diagrame me pika, pikat duhet t'i vizatojmë me kujdes.

Shembulli 1

Në tabelë janë paraqitur lartësia h, në centimetra, dhe mosha x, në vite, të më tepër fëmijëve.

Mosha, x (vite)	2	3	5	7	8	9	11	11	12	15
Lartësia, h (cm)	90	95	115	130	128	140	150	160	150	170

Vizato diagram me pika për t'i paraqitur këto të dhëna.



Korrelacioni

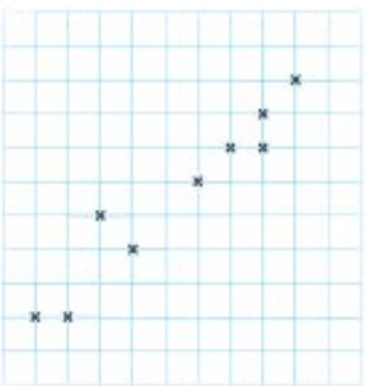
Diagramet me pika i shfrytëzojmë kur duhet të paraqesim **korrelacionin** mes të dhënave.

Korrelacioni është lidhja mes dy ndryshoreve. Kur i interpretojmë diagramet me pika, mund të gjejmë një apo më tepër pika që nuk i përshtaten tendencës ose formës.

Diagrami i dhënë paraqet **korrelacion të fuqishëm pozitiv.**

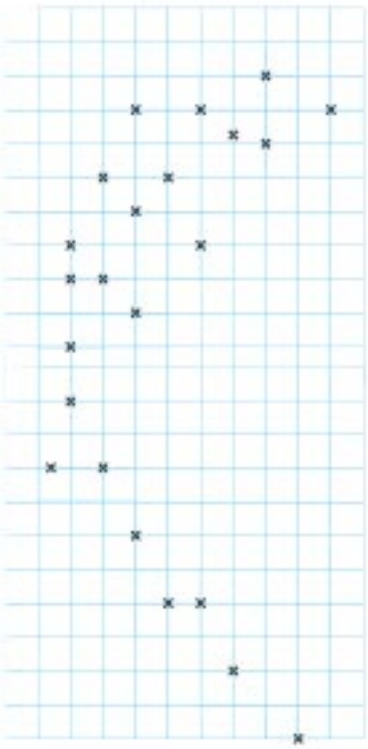
Pikat janë afër drejtëzës së paramenduar e cila shtrihet "nga poshtë majtë deri lart djathtë" në diagramin me pika.

Nëse pikat shtrihen në drejtëz, atëherë kemi korrelacion të përsosur pozitiv.



Ky diagram paraqet korrelacion të dobët pozitiv.

Pikat nuk janë afër drejtëzës së paramenduar, por akoma ekziston skemë e përgjithshme që shtrihet "nga poshtë majtë deri lart djathtë" në diagramin me pika.



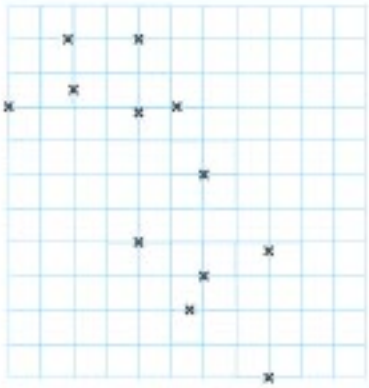
Ky diagram paraqet **korrelacion të fuqishëm negativ**.

Pikat janë afër drejtëzës së paramenduar e cila shtrihet "nga sipër majtë deri poshtë djathtë" në diagramin me pika.

Nëse pikat shtrihen në drejtëz,
ai quhet korrelacion i përsosur negativ.

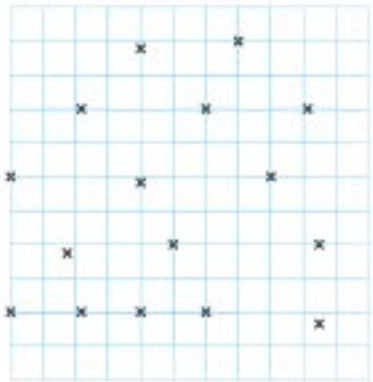
Ky diagram paraqet korrelacion të dobët negativ.

Pikat nuk janë afër drejtëzës së paramenduar, por akoma ekziston tendencë ose formë e përgjithshme që shtrihet "nga lart majtë deri poshtë djathtë"
te diagrami me pika.



Ky diagram **nuk paraqet korrelacion**, respektivisht paraqet **nulti korrelacion**.

Te ky diagram me pika nuk kemi kurrfarë tendencë ose formë.



Shembulli 2

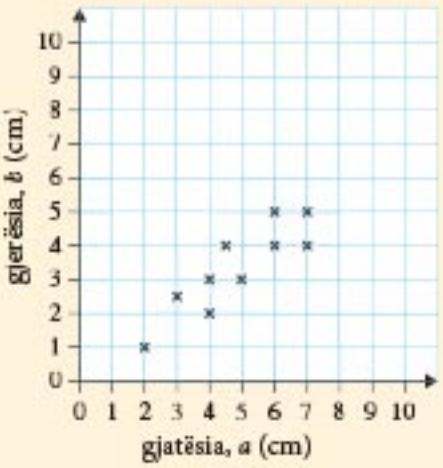
Në tabelë janë paraqitur gjatësia a, në cm, dhe gjerësia b, në cm, të disa guralecëve të plazhit.

Gjatësia, a (cm)	4	5	4	6	4,5	3	7	7	2	6
Gjerësia, b (cm)	2	3	3	4	4	2,5	4	5	1	5

a) Vizato diagram me pika për t'i paraqitur gjatësitë dhe gjerësitë e guralecëve.

b) I cilit lloj është korrelacioni i paraqitur në diagramin me pika?

a)



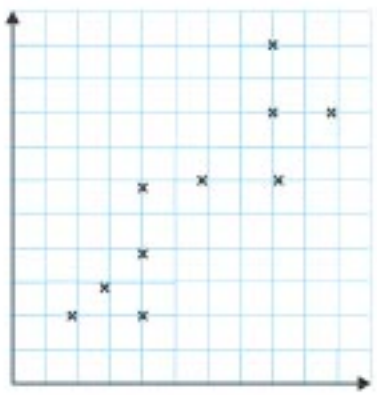
b) Diagrami me pika paraqet korrelacion pozitiv.

Kjo tregon se guralecët më të gjatë janë më të gjerë.

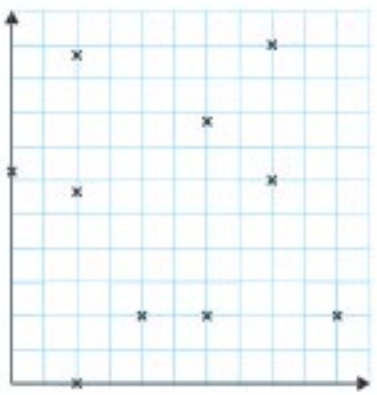
Detyra

1. Si pjesë e detyrës së tij të shtëpisë, Petri ka vizatuar këto diagrame me pika.

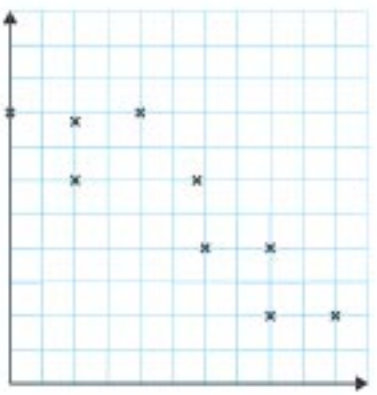
diagrami 1



diagrami 2



diagrami 3

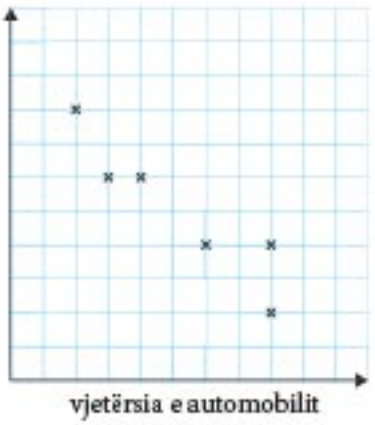


a) Cili diagram paraqet:

i korrelacion negativ

ii korrelacion pozitiv

b) Boshti horizontal i këtij diagrami me pika është emërtuar si "vjetërsia e automobilit"



Me cilën prej shenjave të dhëna mund ta emërtosh boshtin vertikal?

madhësia e makinës, ngjyra, vlera, masa, gjatësia

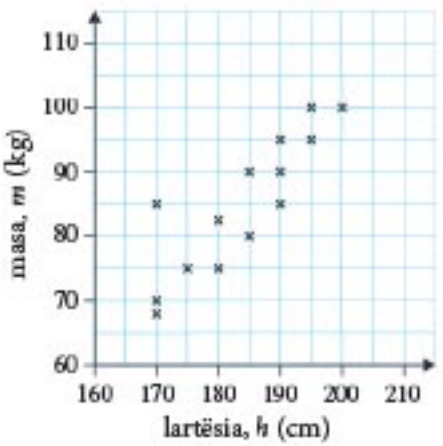
2. Në tabelë është paraqitur numri i porosive të dërguara tekstuale dhe numri i thirrjeve të kryera nga secili nxënës në një grup nxënësish.

Numri i SMS-porosive	16	18	20	24	25	30	38	42
Numri i thirrjeve	40	39	35	32	28	22	12	8

a) Paraqiti të dhënat në diagram me pika.

b) Përshkruaj korrelacionin e paraqitur në diagramin me pika.

3. Diagrami me pika tregon lartësitë h, në cm, dhe masat trupore m, në kg, të lojtarëve të një klubi futbollist.



a) Sa është masa trupore e lojtarit më të lehtë?

b) Sa është lartësia e lojtarit më të lartë?

c) Një lojtar ka masë trupore më të madhe për dallim të lartësisë që ka. Cakto lartësinë dhe masën e këtij lojtari.

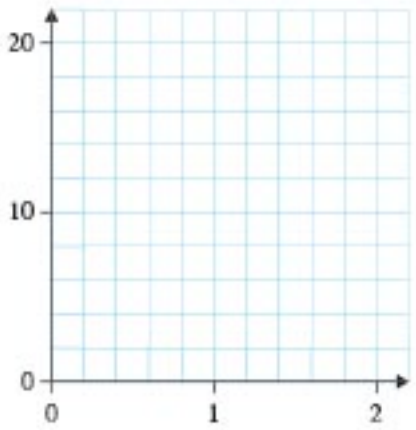
ç) Cakto korrelacionin sipas diagramit me pika.

4. Zorica i ka shënuar kohët e më tepër shëtitjeve që ka bërë ditëve të fundit.

Distanca (km)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3	3,5	4	4,5
Koha, (minuta)	6	11	12	18	25	28	32	31	27	55

a) Vizato të dhënat në diagram me pika.

Shfrytëzo sistemin e dhënë koordinativ. Vazhdoje boshtin horizontal deri në 5, kurse boshtin vertikal deri në 60.



b) Një nga shëtitjet ishte ngjitje në shumë lartësi.

Sa kilometra ishte e gjatë kjo shëtitje? Sa kohë ka zgjatur kjo shëtitje?

c) Cakto në çfarë korrelacioni janë të dhënat në diagramin me pika.

5. Në tabelë janë paraqitur çmimi dhe vjetërsia e disa automobilave të përdorur.

Vjetërsia (vite)	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Çmimi (denarë, mijëshe)	15	12,5	10	9	10	7	12,5	6,5	4,5	2,5	3	2

a) Paraqiti të dhënat në diagram me pika.

b) Në çfarë korrelacioni janë të dhënat e paraqitura në diagramin me pika.

c) Një nga automobilat i përket "serisë speciale".

Çka mendon, cili automobil është ai? Sqaroje përgjigjen tuaj.

6. Një autoshkollë grumbulloi të dhëna për numrin e orëve që kanë pasur nxënësit e saj dhe numri i paraqitjeve në provim për dhënie të testit para marrjes së provimit.

Numri i orëve	15	18	20	25	30	40	30	60	50	45	35	70	60
Numri i testeve	1	1	1	2	1	3	2	1	3	3	2	5	4

a) Paraqiti të dhënat në diagram me pika.

b) Cakto në çfarë korrelacioni janë të dhënat në diagram me pika.

c) Aleksandri donte të dijë sa orë vozitje i duhen para se të japë testin e provimit.

> Përmasa të dobishme prej 2 cm për 10 orë në boshtin vertikal dhe 2 cm për çdo test të boshtit horizontal.

Cilin çift vlerash ai do duhej të mos e përfillë? Shpjego përgjigjen tënde.

7. Në tabelë janë paraqitur rezultatet e dy testeve nga matematika për nxënësit e një klase.

Testi 1	25	50	35	59	45	56	28	23	32
Testi 2	30	52	40	64	48	59	30	30	83

a) Të dhënat paraqiti në diagram me pika.

b) Një nga rezultatet e testit nuk ishte shënuar saktë.

I Çfarë mendon, cili është ai rezultat?

II Sa duhet të jetë ai rezultat?

c) Maja mungoi në testin e dytë. Ajo mori 40 pikë në testin e parë. Përdore diagramin që të vlerësosh rezultatin e saj në testin e dytë.

10.2 Gjasa eksperimentale

Gjilpëra e Bifonit

Kjo ide është shkruar në vitin 1777 nga ana e Grofit nga Bifoni me emrin Zhorzh Luj Leklerk.

Është e nevojshme të kemi një gjilpërë, por mund ta zëvendësojë edhe një fije shkrepëse.

Janë vizatuar në rrafsh (fletë) disa segmente paralele, të gjitha në largësi të barabartë midis tyre. Distanca midis segmenteve fqinje duhet të jetë e barabartë me gjatësinë e gjilperës.

Gjilpërën e hedhim rastësisht në rrafshin e segmenteve. Në fletore mbajmë shënime se a prek ndonjë nga segmentet apo jo.

Eksperimenti përsëritet disa herë.

Pastaj gjejmë frekuencën relative kur "preket segmenti".

Nëse eksperimenti përsëritet mjaftë herë, atëherë frekuenca mund të shfrytëzohet për vlerësim të vlerës së numrit π.

Me kryerjen e këtij eksperimenti praktikisht zgjidhim një nga problemet më të vjetra të gjasës gjeometrike.



Frekuenca relative



Kur hedhim një pineskë, janë të mundshme dy ngjarje.

Mund të bjerë me majën lart ose me majën poshtë.

Këto ngjarje mund të jenë me gjasë të barabartë ose të mos jenë me gjasë të barabartë.

Mund të bëjmë **eksperiment** për ta vlerësuar gjasën.

Mund ta hedhim pineskën më tepër herë dhe të marrim të dhënat.

Çdo hedhje të pineskës e quajmë **tentim**.

Pastaj do t'i përdorim rezultatet për t'i gjetur frekuencat me ndihmë të formulës.

$$\textbf{Frekuenca relative} = \frac{\text{numri i ngjarjeve të suksesshme}}{\text{numri i përgjithshëm i tentimeve}}$$

Frekuencën relative nganjëherë e quajmë **gjasë eksperimentale**.

Frekuencën relative e përdorim si vlerësim të gjasës të ecurisë së rezultatit.

Sa më i madh që është numri i tentimeve të cilat përdoren për vlerësim të gjasës, aq më i mirë do të jetë edhe vlerësimi.

Numri i tentimeve të nevojshme për të gjetur gjasën eksperimentale varet nga numri i ngjarjeve të mundshme.

Numri i tentimeve duhet të jetë rreth 50 herë më i madh se numri i ngjarjeve.

Për shembull, kur hedhim jofer-monedhë me dy ngjarje të mundshme, duhet të jenë të mjaftueshme rreth 100 hedhje.

Kur hedhim monedhën, ngjarjet "numër" dhe "stemë" janë me gjasë të barabartë. Kur kemi jofer-monedhë, ngjarjet "numër" dhe "stemë" nuk janë me gjasë të barabartë.

Kur eksperimentin e përsërisim, nuk duhet të presim që t'i fitojmë rezultatet e njëjta.

Zbatimi i gjasës

Kur hedhim më shumë herë zarin ku çdo faqe e tij është numërtuar me njërën nga shifrat 1 deri 6, presim që secili nga gjashtë numrat e mundshëm të bjerë njësoj herë.

Por në praktik nuk ndodh ashtu.

Mirëpo që të gjashtë numrat bien përafërsish në numër të barabartë, pra kanë frekuencë të afërt me njëri tjetrin.

Për shembull, nëse hedhim zarin 300 herë, presim që secili prej gjashtë numrave të mundshëm të bjerë

$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ herë

Në praktikë me siguri do të fitojmë frekuenca të afërta me numrin 50.

Nëse frekuencat janë shumë të ndryshme, ekziston mundësia të dyshojmë se zari është jofer.

Shembulli 1

Jovana rrotullon rrotulluesen e fatit 150 herë. Shigjeta e rrotullueses ndalet në ngjyrën e kuqe 40 herë.

a) Sa është gjasa eksperimentale se shigjeta e rrotullueses është ndalur në të kuqe?

b) Sa është gjasa eksperimentale se shigjeta e rrotullueses nuk është ndalur në të kuqen?

c) Rrotulluesja është rrotulluar 200 herë.

Bëje vlerësimin sa herë shigjeta e rrotullueses do të ndalet në të kuqen.

a) $\frac{40}{150}$ — Numri i ndaljeve në të kuqen / numri i përgjithshëm i tentimeve

b) $1-\frac{40}{150}$ — P(ngjarja nuk ndodhi) = 1 - P(ngjarja ndodhi)

$=\frac{110}{150}$

c) $\frac{40}{150}\cdot 200$ — Gjasa · numri i rrotullimeve

$= 53,(3)$

Numri i ngjarjeve duhet të jetë dhënë si numër i plotë.

Vlerësim i mirë është se është ndalur në të kuqe rreth 53 herë.

Shembulli 2

Tome mbolli disa fara trëndafili në ngjyra të ndryshme në kopshtin e vet.

Ato të gjitha mbinë, u rritën dhe lulëzuan.

Në tabelë janë paraqitur ngjyrat me të cilat kanë lulëzuar.

Ngjyra	e kuqe	e verdhë	e portokalltë	vjollcë
Frekuenca	8	32	6	4

a) Sa fara ka mbjellë Tome?

b) Njehso frekuencën relative të secilës ngjyrë.

c) Zgjidhjet nën **b)** shfrytëzoi për të njehsuar numrin e trëndafilave ngjyrë vjollce që do të paraqiteshin nëse do të mbjellshim 240 fara të trëndafilave të tilla me ngjyrë të ndryshme.

a) $8+32+6+4=50$ trëndafila

b)

Ngjyra	e kuqe	e verdhë	e portokalltë	vjollcë
Frekuenca	8	32	6	4
Frekuenca relative	$\frac{8}{50}$	$\frac{32}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{4}{50}$

c) $\frac{40}{150}\cdot 240=19,2$

Vlerësimi për trëndafilat me ngjyrë vjollce është 19.

Shembulli 3

Zari është hedhur 240 herë.

Në tabelë janë paraqitur frekuencat e ngjarjeve të mundshme

Rezultat	1	2	3	4	5	6
Frekuenca	10	20	50	60	40	60

Përgjigju vallë zari është me gjasë zar jofer.

Sqaroje përgjigjen tënde.

$\frac{1}{6} \cdot 240 = 40$, domethënë mund të presim që rreth 40 herë do të paraqitet secila ngjarje.

10 është shumë larg numrit 40, prandaj përfundojmë se zari me siguri ka gjasa të jetë jofer.

Nëse e hedhim më tepër herë zarin, atëherë mund të vërtetojmë se kemi zar-jofer.

Detyra

1. Në një sallon për automobila shiten automobila në gjashtë ngjyra të ndryshme.

Në tabelë është dhënë numri i automobilave prej secilës ngjyrë.

Ngjyra	e bardhë	e kaltër	e verdhë	e zezë	e gjelbër	e kaftë
Frekuenca	11	4	2	12	5	6

a) Cakto frekuencën relative për secilën ngjyrë të veturës.

b) Drejtuesi i sallonit rastësisht zgjodhi një veturë. Vlerësoni gjasën se automobili i përzgjedhur rastësisht ka ngjyrë të verdhë.

2. Bojana ka shënuar sa herë autobusi i saj vonohet. Prej gjithsej 45 rasteve, autobusi ishte vonuar 6 herë.

a) Vlerësoni gjasën se autobusi do të vonohet nesër.

b) Ajo udhëton me autobus 10 herë në javë. Sa herë mund të presë që autobusi do të vonohet?

3. Një zar hidhet 20 herë.

Në tabelë të frekuencës është paraqitur sa herë bie secili nga numrat prej 1 deri 6.

Numri	1	2	3	4	5	6
Frekuenca	2	6	4	7	0	1

a) Sa është frekuenca relative e numrit 4 për këtë zar?

b) Nëse zari është jofer-zar, sipas rezultateve nga tabela, vlerësoje gjasën se do të bjerë 4 në hedhjen e radhës.

c) Nëse zari është fer-zar, vlerësoje gjasën që të bjerë 4 në hedhjen e radhës.

4. Gjasa se aeroplani do të aterojë me vonesë është 0,3.

Prej gjithsej 300 fluturimeve, sa herë pritet që të aterojë me vonesë?

5. Një kompani prodhon pjesë kompjuterike

Ka testuar 300 pjesë që të shohë sa është jetëgjatësia e tyre.

25 pjesë kishin jetëgjatësi më të vogël se 500 orë.

220 pjesë kishin jetëgjatësi ndërmjet 500 dhe 2000 orë.

Të tjerat më tepër se 2000 orë.

a) Vlerësoje gjasën se një pjesë ka jetëgjatësi më pak se 500 orë.

b) Vlerësoje gjasën se një pjesë ka jetëgjatësi më tepër se 2000 orë.

c) Një shitore porositi 4000 pjesë.

Vlerëso sa prej tyre do të kenë jetëgjatësi më tepër se 500 orë.

6. Sofia ka zari prej të cilit nuk bien gjashtat aq sa dëshiron ajo.

Bëri eksperiment që të shohë se zari a është jofer në lidhje me gjashtat.

E hedh zarin 100 herë dhe pas çdo hedhjeje shënonte në fletore bie apo nuk bie numri 6.

Në tabelën djathtë janë ngjarjet e hedhjes, në grupe prej nga 10.

„6" domethënë ka rënë gjashta, kurse "H" domethënë nuk ka rënë gjashta.

H	H	H	H	6	H	H	H	6	6
H	H	6	H	H	H	H	H	6	6
6	H	H	H	H	H	H	6	H	H
H	H	H	H	H	6	H	H	H	H
H	6	H	H	H	H	H	H	H	6
H	H	H	H	H	H	H	H	6	H
H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
H	6	H	H	H	H	H	H	H	H
H	H	H	6	H	H	H	H	H	H
H	H	H	H	H	H	6	H	H	6

a) Njehso frekuencën relative të 6 pas 10 hedhjeve.

b) Njehso frekuencën relative të 6 pas 20 hedhjeve.

c) Njehso frekuencën relative për 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 dhe 100 hedhje.

Rivizatoje tabelën në fletore dhe plotësoje për t'i paraqitur ngjarjet.

Aty ku është e domosdoshme, shëno frekuencën relative me dy vende dhjetore.

Numri i hedhjeve	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Frekuenca e 6	3									
Frekuenca relative e 6	$\frac{3}{10} = 0{,}3$									

ç) Në fletore rivizatoje sistemin e dhënë koordinativ.

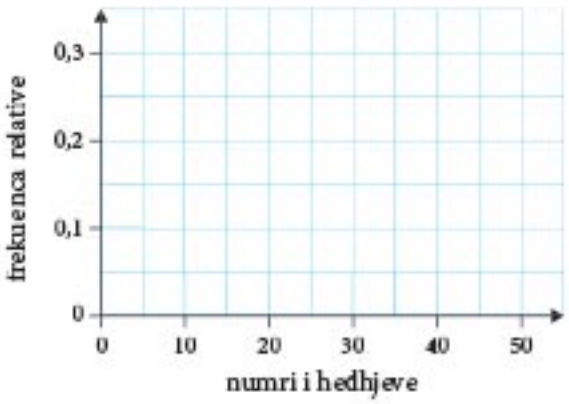
Vazhdoje boshtin horizontal deri në 100.

Shënoji pikat nga tabela në sistemin koordinativ.

d) Çfarë tregon diagrami në lidhje me frekuencën relative kur numri i hedhjeve rritet.

dh) A mendon se zari është jofer në lidhje me numrin 6?

Sqaroje përgjigjen tënde.



7. Rrotulluesja e dhënë ka pesë pjesë të barabarta.

Ana dhe Selma duan të zbulojnë se rrotulluesja a është fer.

Ata vlerësuan gjasën që shigjeta të ndalet në pjesën ngjyrë kuqe.

a) Ana e rrotulloi rrotulluesen 10 herë.

Shigjeta u ndal në të kuqen tri herë.

Sa është frekuenca relative e të kuqes pas këtyre rrotullimeve?



b) Selma rrotulloi rrotulluesen 100 herë.

Shigjeta u ndal në të kuqen tetë herë.

Sqaro përse rezultatet e Selmës do të ishin vlerësim më i mirë për vlerësimin e gjasës së kërkuar.

c) Kombinoji rezultatet e Anës dhe Selmës.

Shfrytëzoji rezultatet e kombinuara për të vlerësuar gjasën që shigjeta të ndalet në të kuqen me këtë rrotulluese.

ç) A mendon se rrotulluesja është fer?

Shfrytëzoje përgjigjen nën **c)** për të dhënë shpjegim.

8. Një rrotulluese me katër pjesë është jofer.

Që të vlerësohet gjasa e secilit numër, eksperimenti përsëritet disa herë.

Në tabelë janë paraqitur disa nga rezultatet.

Numri	1	2	3	4
Frekuenca relative	0,1			0,3

Rrotulluesja ndalet në 2, dy herë më shpesh se në 3.

Rrotulluesja rrotullohet 50 herë.

Sa herë mund të presim ajo të ndalet në 2? Trego si gjykove.

9. Në dy rrotullueset janë shënuar numrat prej 1 deri 4.

Tabelat i paraqesin rezultatet pas 120 rrotullimeve të secilës rrotulluese.

Mbaj mend se shuma e të katër gjasave është patjetër = 1.

Rrotulluesja A	
Rezultati	Frekuenca
1	28
2	32
3	29
4	31

Rrotulluesja B	
Rezultati	Frekuenca
1	24
2	23
3	25
4	48

Vetëm njëra nga rrotullueset është fer.

Cila rrotulluese mendon se është fer? Sqaroje përgjigjen tënde.

10.3 Ngjarjet që reciprokisht përjashtohen

Kur një monedhë e hedhim në ajër, pasi të bjerë në tokë, mund të paraqitet "numër" ose "stemë". Të dy ngjarjet nuk mund të ndodhin njëkohësisht. Për këto ngjarje, të cilat nuk mund të ndodhin njëkohësisht, porse vetëm njëri nga ato dyja, themi se **reciprokisht përjashtohen**.

Shembulli 1

Hidhet një zar.

Cakto vallë ngjarjet A dhe B reciprokisht brisi përjashtohen ose jo.

Sqaroje përgjigjen tënde.

a) A: Ra numri 6. B: Ra numri 3.

b) A: Ra numri 2. B: Ra numër çift.

a) Ngjarjet reciprokisht përjashtohen.

Numrat 6 dhe 3 nuk mund të bien njëkohësisht.

b) Ngjarjet reciprokisht nuk përjashtohen.

Numra çift janë 2, 4 dhe 6. Nëse ka rënë 2, atëherë ai po ashtu është edhe numër çift.

Shuma e gjasave të ngjarjeve që reciprokisht përjashtohen

Shuma e gjasave të të gjitha ecurive që reciprokisht përjashtohen për secilën ngjarje është 1, pasi që një nga ecuritë me siguri do të ndodhë.

Rrotulluesja ka gjashtë pjesë, të gjitha të barabarta me madhësi.

Të tri ngjyrat nuk janë të barabarta sipas gjasës.

Gjasa e secilës ngjyrë është:

$P(\text{kuqe}) = \frac{2}{6}$ $P(\text{bardhë}) = \frac{1}{6}$ $P(\text{kaltër}) = \frac{3}{6}$



P(kuqe) paraqet gjasën se rrotulluesja do të ndalet në pjesën me ngjyrë të kuqe.

Përveç këtyre tri ngjyrave, në rrotulluese nuk ka ngjyra të tjera, prandaj kur të rrotullohet, ajo sigurisht do të ndalet në njërën nga ngjyrat e përmendura.

Kjo do të thotë se shuma e të tri gjasave është 1.

Nëse njohim gjasën e dy prej këtyre ngjarjeve, lehtë gjejmë gjasën e ngjarjes së tretë.

Shembulli 2

Andrea ka rrotulluese me katër ngjyra.

Në tabelë janë paraqitur gjasat e tri ngjyrave.

Ngjyra	e kuqe	e bardhë	e verdhë	e gjelbër
Gjasa	0,1	0,25	0,4	

Sa është gjasa që rrotulluesja të ndalet në ngjyrën e gjelbër?

Ngjarjet reciprokisht përjashtohen

Nuk ekziston ngjyrë tjetër e mundshme.

Prandaj shuma e katër gjasave është 1.

P(e kuqe, e bardhë ose e verdhë) = 0,1 + 0,25 + 0,4 = 0,75.

P(e gjelbër) = 1 – 0,75

= 0,25.

Detyra

1. Hidhet një zar.

Ngjarjet A dhe B a përjashtohen reciprokisht?

Sqaroje përgjigjen tënde.

a) A: Bie numri 4. B: Bie numër më i vogël se 5.

b) A: Bie numër çift. B: Bie numër tek.

c) A: Bie numër çift. B: Bie numër më i madh se 4.

2. Bojani ka kuti me topa.

Në kutinë ka topa të kuq, të verdhë, të kaltër, dhe të gjelbër.

Në tabelë është paraqitur gjasa për zgjedhje të topit të kuq, të verdhë ose të kaltër.

Ngjyra	e kuqe	e verdhë	e kaltër	e gjelbër
Gjasa	0,1	0,4	0,2	

Sa është gjasa që Bojani do të zgjedhë një top të gjelbër?

3. Në një kuti ka disa disqe.

Disqet janë shënuar me numrat 1, 2, 3, 4 ose 5.

Prej kutisë në mënyrë të rastësishme nxirret një disk.

"Në mënyrë rastësore" domethënë secili disk ka gjasë të barabartë për t'u nxjerrë.

a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën me gjasën për të qenë i zgjedhur secili nga numrat.

Numri	1	2	3	4	5
Gjasa	0,15	0,25	0,1		0,35

b) Cila gjasë është më e madhe, të nxirret disk i shënuar me numër tek apo me numër çift?

4. Në një kuti ka bonbone vetëm të kuqe, të verdha dhe të portokallta.

Rastësisht nxjerrim një bonbone.

Në tabelë janë paraqitur gjasa për nxjerrje të bonbones me ngjyrë të kuqe dhe gjasa për nxjerrje të bonbones së verdhë.

Bonbone	e kuqe	e verdhë	e portokalltë
Gjasa	0,2	0,35	

Sa është gjasa për t'u nxjerrë rastësisht një bonbone me ngjyrë portokalli?

5. Kur një monedhë hidhet në ajër, mbasi të bjerë në tokë, në anën e sipërme mund të paraqitet "numër" (N) ose "stemë" (S).

Njëkohësisht në ajër hidhen dy monedha.

Kemi katër ngjarje të mundshme: NN, NS, SN dhe SS.

a) Sa ngjarje të mundshme ka, nëse njëkohësisht hidhen tri monedha?

b) Sa do të jetë gjasa që tri monedhat të bien në të njëjtën anë?

6. Në dy kuti ka topa të kuq dhe të verdhë.

Kutitë përmbajnë numër të barabartë të topave.

Gjasa të nxirret një top i kuq nga kutia A është 0,5.

Zgjedh vlerë për numrin e topave në secilën kuti. Kujdes, duhet të fitosh numër të plotë kur do të shumëzosh atë vlerë me 0,5 dhe me 0,2.

Gjasa të nxirret një top i kuq nga kutia B është 0,2.

Të gjithë topat nga të dy kutitë derdhen në kuti të tretë C.

Sa është tani gjasa të nxirret top i kuq nga kutia C?

7. Çdo ditë nëna Teos i jep pemë prej enës të mbushur me pemë.

Në tabelë është paraqitur gjasa për zgjedhje të secilit lloj peme nga ena me pemë.

Pemë	mollë	dardhë	banane	portokall
Gjasa	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	

Sa është numri më i vogël i portokajve që mund t'i ketë pjata me pemë?

Sqaroje përgjigjen.

Në fillim caktoje gjasën për zgjedhje të një portokalli. Pastaj caktoje shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve.

8. Më tepër kartolina me figura përdoren në një lojë fëmijërore.

Në tabelë janë paraqitur gjasat për zgjedhje të kartolinës me figurë autobusi, me figurë automobili dhe me figurë skuteri.

Fotografia	autobus	automobil	biçikletë	skuter
Gjasa	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$

a) Sa është gjasa të zgjidhet kartolina me figurë biçikletë?

b) Cili rezultat është më me gjasë (më i sigurt)?

c) Sa është gjasa të mos zgjidhet (nxirret) kartolina me figurë autobusi?

ç) Pas një numri të caktuar të nxjerrjeve, kartolina me figurë skuteri ishte zgjedhur 15 herë. Sa loja janë luajtur?

10.4 Tabela e ngjarjeve

Të gjitha ngjarjet e mundshme të dy ngjarjeve të njëpasnjëshme mund t'i shënojmë në tabelë. Kjo tabelë me të gjitha ngjarjet e mundshme quhet **tabela e ngjarjeve**

Shembulli 1

Njëkohësisht hidhen një zar i kuq dhe një zar i kaltër.

Paraqiti të gjitha ngjarjet e mundshme në tabelë të ngjarjeve.

		zari i kuq					
		1	2	3	4	5	6
zari i kaltër	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Shembulli 2

Njëkohësisht hidhen dy fer-zare, njëra e kuqe, kurse tjetra e kaltër.

Fer-zar domethënë se çdo numër i zarit ka gjasë të barabartë.

Numrat që bien në anën e sipërme të tyre, i mbledhim.

a) Paraqiti të gjitha ngjarjet e mundshme në tabelën e ngjarjeve.

b) Përmes tabelës së ngjarjeve përcaktoje gjasën për të fituar:

I shumë të barabartë me 3

II shumë të barabartë me 12

III shumë më të madhe se 6.

c) Cila shumë është me gjasë më të madhe?

a)

		zari i kaltër					
		1	2	3	4	5	6
zari i kuq	1	2	③	4	5	6	7
	2	③	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

b) I $P(\text{shumë e barabartë me } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ Numërojmë sa herë numri 3 paraqitet në tabelë (të paraqiturat e rrethuara).

II $P(\text{shumë e barabartë me } 12) = \frac{1}{36}$ Pjesëtojmë me numrin e përgjithshëm të ecurive të mundshme.

III $P(\text{shumë më e madhe se } 6) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ E thjeshtojmë thyesën kur është e mundshme.

c) Shumë më me gjasë është 7. Ka gjashtë mënyra në të cilat mund të fitohet shuma 7.

Detyra

1. Një monedhë dhe një zarë hidhen njëkohësisht.

Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e ngjarjeve për t'i paraqitur të gjitha ngjarjet e mundshme.

		zari					
		1	2	3	4	5	6
monedha	N	N, 1					
	S						

2. Njëkohësisht hidhen dy fer-zare.

Numrat që bien në anën e sipërme të tyre, shumëzohen.

a) Paraqiti gjitha ngjarjet e mundshme në tabelën e ngjarjeve.

b) Sa është gjasa që të fitohet prodhimi 10 ose më pak se 10?

c) Sa është gjasa të fitohet prodhim më i madh se 20?

ç) Sa është gjasa të fitohet prodhim – numër çift?

3. Në një lojë njëkohësisht hidhen dy fer-zare.

Numrat që bien në anën e sipërme të zareve, zbriten.

Në tabelën e ngjarjeve janë paraqitur disa ndryshime të tilla

		zari 1					
		1	2	3	4	5	6
zari 2	1	0	1	2			
	2	1	0				
	3	2					
	4						
	5						
	6						

a) a) Si mund të fitohet ndryshimi 0?

b) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e ngjarjeve.

c) Sa është gjasa të fitohet ndryshimi 1?

ç) Sa është gjasa të fitohet ndryshimi numër çift?

d) Sa është gjasa të fitohet ndryshim më i vogël se 4?

dh) Cili ndryshim ka gjasën $\frac{1}{18}$?

4. Te një fer-rrotulluese trefaqësore janë shënuar numrat 1, 3 dhe 5.

Njëkohësisht rrotullohet rrotulluesja dhe hidhet një fer-zar.

E shënojmë shumën e dy numrave të fituar.

Në tabelën e ngjarjeve janë paraqitur disa nga shumat e mundshme.

		zari					
		1	2	3	4	5	6
rrotulluesja	1	2	3				
	3	4					
	5						11

a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e ngjarjeve.

b) Sa është gjasa të fitohet shuma 9?

c) Sa është gjasa të fitohet shumë më e vogël se 6?

5. Në një kuti ka pesë disqe.

Disqet janë shënuar me numrat 2, 4, 6, 8 ose 10.

Nga kutia pa shikuar nxirret një disk.

Pastaj ai disk prapë kthehet në kuti.

Nga kutia pa shikuar nxirret disku i dytë.

E shënojmë shumën e numrave të fituar prej dy disqeve të nxjerra.

Në tabelën e ngjarjeve janë paraqitur disa nga këto shuma.

		disku 1				
		2	4	6	8	10
disku 2	2	4	6	8		
	4	6	8			
	6	8				
	8					18
	10				18	20

a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e frekuencës për t'i paraqitur shumat e mundshme.

b) Sa është gjasa se shuma është 16?

c) Çka është më e madhe – gjasa se shuma është katror i plotë ose gjasa se shuma është kub i plotë?

Sqaroje përgjigjen.

16 është katror i plotë meqenëse $4 \cdot 4 = 16$.
27 është kub i plotë meqenëse $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

6. Dy fer-rrotulluese i tregojnë numrat 0, 1 dhe 2.

Rrotullohen të dyja njëkohësisht.

Shënojmë prodhimin e të dy numrave të fituar.

Në tabelën e ngjarjeve janë paraqitur disa nga prodhimet e mundshme.

		rrotulluesja 1		
		0	1	2
rrotulluesja 2	0	0		
	1			2
	2		2	4

a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e ngjarjeve.

b) Marija thotë: "Ka vetëm katër prodhime, një prej tyre është 0. Sipas saj, gjasa për të fituar prodhim =0 e $\frac{1}{4}$."

Sqaro përse Marija gaboi.

Mendo në sa mënyra fitohen prodhimet.

Detyra për përsëritje

1. Marku thotë: "Kur punojnë më pak arka në vetëshërbim, unë duhet të pres më gjatë".

Për të kontrolluar se a ka të drejtë, ai grumbulloi këto të dhëna:

Numri i arkave që punojnë	3	4	8	6	12	5	10	9
Koha e pritjes (minuta)	4	3	5	8	2	3	5	4

a) Vizato diagram me pika për t'i paraqitur të dhënat.

b) A mendon se Marku ka të drejt? Sqaroje përgjigjen tënde.

2. Një automobil rastësisht është zgjedhur në një parking.

Konstato se ngjarjet A dhe B reciprokisht a përjashtohen apo jo.

Sqaroje përgjigjen tënde.

a) A: Automobili ka timonin në anën e majtë
B: Automobili ka timonin në anën e djathtë.

b) A: Automobili është i kuq.
B: Automobili është i kaltër.

c) A: Automobili ka ulëse përpara
B: Automobili ka ulëse prapa.

3. Një zar është jofer-zarë.

Në tabelë janë paraqitur gjasat për të fituar 1, 2, 3, 4 dhe 5, gjatë hedhjes së zarit.

Rezultati	1	2	3	4	5	6
Gjasa	0,15	0,1	0,05	0,1	0,2	

Gjeje gjasën të bjerë 6.

4. Jusufi përgatit sandviçë për shitje në qebaptoren e tij.

Në tabelë janë paraqitur gjasat e shitjes së llojeve të sandviçëve që i përgatit.

Sandviç	me pleskavicë	me tuna	me sallatë	me vezë	me sallamë
Gjasa	0,3	0,41	0,1	0,25	0,2

a) A ka gabim në tabelë?

b) Gjasa për shitje të sandviçëve me tunë nuk është e saktë.
Sa duhet të jetë kjo gjasë?

c) Jusufi ka bërë 200 sandviçë për t'i shitur.
Sa prej tyre pritet të jenë me pleskavicë?

5. Një rrotulluese ka tri pjesë të barabarta.
Pjesët janë shënuar me numrat 3, 4 ose 5.
Rrotulluesja sillet dy herë.
Shënojmë shumën e këtyre dy numrave të fituar.

a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e frekuencës për t'i paraqitur shumat e mundshme.

		rrotullimi i parë		
		3	4	5
rrotullimi i dytë	3			
	4			
	5			

b) Sa është gjasa të fitohet shuma 8?

c) Sa është gjasa të fitohet shumë numër tek?

6. Zerina hodhi gozhdën 120 herë.
Ajo ra me majën lart 35 herë.

a) Sa është frekuenca relative që gozhda të bjerë me majën lart?

b) Zerina planifikon të hedhë gozhdën 500 herë.
Sa herë mund të pritet që gozhda të bjerë me majë lart?

7. Tri nxënëse të klasës ndërtuan vetë nga një zar personal.
Secila e hidhte zarin e saj që të testojë a është fer-zar dhe rezultatet i paraqiti në tabelë.
Në tabelë janë paraqitur rezultatet e nxënëseve.

	1	2	3	4	5	6
Anja	20	20	20	20	20	20
Bojana	9	11	12	8	9	11
Ema	14	16	12	11	12	25

Përgjigju pyetjeve në vijim. Shpjegoje secilën përgjigje tënde.

a) Cila nxënëse ka ndërtuar zarin që me gjasë është fer-zar?

b) Cila nxënëse ka ndërtuar zarin që me gjasë nuk është fer-zar?

c) Cila nxënëse me sa duket mashtron dhe aspak nuk ka hedhur zarin?

Tema 1 – Numri dhe zgjidhja e problemeve

1. Përshkruaji shprehjet. Në vendet e zbrazëta shëno numrat që mungojnë.

a) $17{,}26 \cdot 1000 = \ldots\ldots$

b) $3{,}8 : \ldots\ldots = 0{,}038$

2. Njehso: $34{,}2 : 6$

3. Është dhënë prodhimi:

$37 \cdot 291 = 10767$

Njehso:

a) $3{,}7 \cdot 2{,}91$

b) $107{,}67 : 0{,}37$

4. Janë dhënë numrat:

0,01 0,1 1 10 100

Shfrytëzo katër nga këta numra që të jenë të sakta këto pohime.

Secilin nga numrat mund ta përdorësh vetëm një herë.

$24 \cdot \ldots = 24 : \ldots$

$24 : \ldots = 24 \cdot \ldots$

5. Është dhënë thyesa:

$$\frac{26{,}3 + 47{,}9}{107{,}4 - 3{,}29}$$

a) Njehso rezultatin me kalkulator.

Shkruaji të gjitha shifrat e fituara me kalkulatorin.

b) Zgjidhjen rrumbullakoje me 3 vende dhjetore

6. Përshkruaji shprehjet. Shëno numra përkatës në fushat e zbrazëta për të fituar barazime të sakta.

a) $4{,}68 : 0{,}8 = 4{,}68 \cdot \square : 8$

b) $56{,}3 \cdot \square = 56{,}3 \cdot 7 : 100$

7. Përshkruaji shprehjet. Shëno numra përkatës në fushat e zbrazëta për të fituar barazime të sakta.

a) $265 \cdot ... = 2{,}65$

b) $45{,}8 : ... = 458$

8. Kjo është pjesë e detyrës së shtëpisë nga matematika për Nikollën:

$263 \cdot 1{,}15 = 241$

Nikolla ka gabuar.

Shpjego si mund të tregosh se ai a ka gabuar pa e njehsuar zgjidhjen e saktë.

9. Shkruaj eksponentin që mungon: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{\square}$

10. Njehsoje vlerën e $5^3 + 13^2$

11. Njehsoje vlerën e

a) 2^1 **b)** 2^4

12. Thjeshtoji shprehjet. Zgjidhjet shënoji në formë fuqie.

a) $x^3 \cdot x^5 : x^4$

b) $(y^3)^5 : y^4$

13. Është dhënë vargu i numrave.

2, 6, 7, 9, 16, 24, 30, 60

Plotësoji vendet e zbrazëta me numra nga vargu ashtu që të fitosh pohime të sakta:

a) _____ dhe _____ janë pjesëtues të 12.

b) _____ dhe _____ janë shumëfisha të 15.

c) _____ dhe _____ janë numra të thjeshtë.

ç) _____ dhe _____ janë katrorë të plotë.

14. Shënoje thyesën $\frac{45}{54}$ si thyesë të pathjeshtueshme.

15. Shënoje thyesën $\frac{26}{7}$ si numër të përzier.

16. Njehso $\frac{1}{6}$ prej 84.

17. Përshkruaje dhe plotësoje shprehjen me një nga shenjat: = , < ose >.

$\frac{15}{100} \square \frac{1}{5}$

18. Shënoji të gjitha thyesat që ndërmjet vete janë ekuivalente

$\frac{7}{27}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{32}{40}$, $\frac{28}{32}$, $\frac{20}{25}$

19. Njehso $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{5}$

20. Njehso $\frac{2}{5}$ prej 75.

21. Njehso $\frac{3}{5}$ prej $\frac{4}{7}$.

22. Përshkruaje shprehjen dhe shëno thyesë në vendin e zbrazët ashtu që të fitohet barazim i saktë.

$2\frac{1}{3} \cdot \square = 5\frac{5}{6}$

23. Njehso: **a)** 4^3 **b)** $\sqrt{324}$

24. Njehsoje vlerën e:

a) $\sqrt[3]{125}$ **b)** 8^0

25. Përzgjedh fjalë adekuate ashtu që pohimet të jenë të sakta.

kub **rrënjë katrore** **katror** **rrënjë kubike**

a) _____ prej 14 është 196

b) _____ prej 125 është 5

26. Përdor kllapa për të fituar barazim të saktë.

$7 \cdot 2 + 1 - 4 = 17$

27. Njehso:

a) $(4 + 17) \cdot 5 - 3$

b) $4^2 + 48 : (4^2 - 4)$

28. Aleku mati lartësinë e një bime.

Në fillimin të javës së parë bima ishte e lartë 36 mm.

Një javë më vonë ajo është e lartë 63 mm.

Njehso për sa përqind është zmadhuar lartësia e bimës.

29. Zina ka kursim prej 1500 denarë në llogarinë e tij bankare.

Banka llogarit kamatë 4%.

Njehso shumën e përgjithshme të parave në llogarinë e tij bankare pas një viti.

30. Në një restorant, llogarisë i shtohen 15% parapagim për shërbim.

Sa është vlera e parapagimit për shërbim për llogarinë me vlerë prej 450 denarë?

31. Farija bleu automobil të ri.

Automobili humb 23% prej vlerës së tij pas vitit të parë.

Në fund të vitit të parë automobili i Farijes vlente 657580 denarë.

Me çfarë çmimi e ka blerë automobilin Farija?

Trego si erdhe në përgjigje.

32. Aleksandri përzihu ngjyrë të kuqe me të bardhë në raport 5 : 1.

a) Njehso sa ngjyrë të kuqe duhet të përziejë me 2 litra ngjyrë të bardhë.

b) Njehso sa ngjyrë të bardhë duhet të përziejë me 2,5 litra ngjyrë të kuqe.

33. Në një tren raporti mes njerëzve të rritur dhe fëmijëve është 4 : 3.

Në tren gjenden 120 fëmijë.

Njehsoje numrin e përgjithshëm të njerëzve në tren.

34. Shëno raportin 63 : 35 : 49 në formën më të thjeshtë të saj.

35. Aleku përzihu 2,4 kg zhavorr, 1,5 kg rërë dhe 600 g çimento.

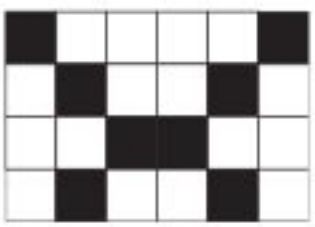
Shëno raportin: zhavorr : rërë : çimento në formën më të thjeshtë të tij.

36. Kursi devizor mes kunës kroate dhe denarit maqedonas është 1 kunë = 8,14 denarë.

a) Shndërro 250 kuna në denarë.

b) Shndërro 7500 denarë në kuna. Rrumbullakoje zgjidhjen në dy dhjetore.

37. Në vizatim është paraqitur skema prej katrorëve të zinj dhe të bardhë.



Shëno raportin katrorë të zinj : katrorë të bardhë në formën më të thjeshtë të tij.

38. Janë dhënë përbërësit e bërjes së ëmbëlsirës.

Ja receta për 12 ëmbëlsira.

a) Petri do të bëjë 24 ëmbëlsira.

Sa sheqer i nevojiten?

b) Sllagjana përgatit ëmbëlsira për 6 persona.

Sa gjalpë i nevojiten?

c) Gordana përgatit ëmbëlsira për 20 njerëz.

Njehso sa miell i nevojitet.

Receta për ëmbëlsira

180 g miell
60 g sheqer
120 g gjalpë

për 12 ëmbëlsira

39. Limonada bëhet prej përzierjes së lëngut të limonit dhe ujit në raport 2 : 7.

a) Njehso sa ujë duhen të përzihen me 800 ml lëng limoni.

b) Daniela do të bëjë 36 litra limonadë për aheng.

Njehso sa litra lëng limoni i duhen.

40. Janë dhënë katër raporte:

9 : 21 30 : 80 24 : 56 60 : 140

Tre prej tyre janë raporte ekuivalente.

Cili nga këto raporte dallohet prej tjerave.

41. Kursi i këmbimit mes dollarit amerikan ($) dhe euros (€) është 1$ = 0,90€.

a) Shndërro 420$ në euro.

b) Shndërro 160€ në dollarë. Zgjidhjen rrumbullakoje në dy vende dhjetore.

42. **a)** Cakto anëtarin e ardhshëm në vargun 4, 7, 10, 13, ...

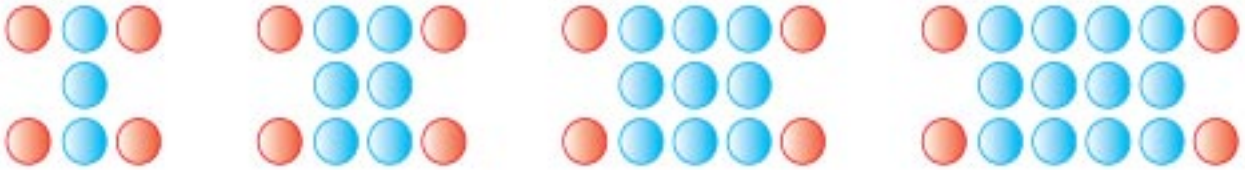
b) Njehso anëtarin e ardhshëm në vargun 25, 18, 11, 4, ...

43. vizatimi 1 vizatimi 2 vizatimi 3 vizatimi 4



Vizatoje vizatimin e vijues të vargut.

44. vizatimi 1 vizatimi 2 vizatimi 3 vizatimi 4



a) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën e vargut të vizatimeve.

Vizatimi	1	2	3	4	5	6
Numri i rrathëve	7	10				

b) Shënoje rregullën "për caktim të anëtarit të ardhshëm" të vargut për numrin e rrathëve.

c) Shkruaj formulë për numrin e rrathëve në vizatimin e n-të.

ç) Gjeje numrin e rrathëve në vizatimin e 40-të.

d) Një vizatim i vargut ka 232 rrathë.

Gjeje vlerën e n-të për këtë vizatim.

45. Është dhënë vargu 5, 10, 20, 40, ...

a) Shënoje me fjalë rregullën "për caktim të anëtarit të ardhshëm" të vargut.

b) Cakto anëtarin e radhës te vargu

46. Cakto dy anëtarët e radhës te vargu 29, 26, 21, 14, 5, ...

47. Njehso tre anëtarët e parë të vargut te i cili anëtari i n-të është $n^2 + 5$.

48. Cakto anëtarin e n-të të këtyre vargjeve.

a) 3, 6, 9, 12, ...

b) 17, 14, 11, 8, ...

49. Cakto anëtarin e n-të për vargjet e dhëna.

a) 1, 4, 9, 16, ...

b) 1, 8, 27, 64, ...

50. vizatimi 1 vizatimi 2 vizatimi 3 vizatimi 4



a) Vizatoje vizatimin 5.

b) Përshkruaje dhe plotësoje tabelën për vargun e vizatimeve.

Vizatimi, n	1	2	3	4	5
Numri i rrathëve	$2 = 1 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 3 \cdot 4$		

c) Shkruaje rregullën për gjetje të numrit të rrathëve në vizatimin n.

51. Largësia midis Berovës dhe Strugës është rreth 195,73 milje.

Njehso sa kilometra ka prej Berovës deri në Strugës

Algjebra dhe zgjidhja e detyrave

1. $p = 5r$

Njehso p kur $r = 4{,}5$.

2. $L = 2a + 2b$

Njehso L kur $a = 6$ dhe $b = 9$.

3. $E = \frac{1}{2}mv^2$

a) Njehso E kur $m = 7$ dhe $v = 12$.

b) Njehso v kur $E = 32$ dhe $m = 9$.

c) Shprehe m nga formula.

4. $P = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Njehso P kur $r = 3$ dhe $h = 7$.

Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

5. Një lëpirëse kushton x denarë, kurse një akullore kushton y denarë.

Shëno formulë për çmimin e përgjithshëm T që duhet të paguhet për 3 lëpirëse dhe 5 akullore.

6. Shprehe f nga formula $g = 5f - 6$.

7. Shprehe R nga formula $V = IR$.

8. Shprehe x nga formula $2(x - y) = 7y + 8$.

9. Shprehe h nga formula $g = \sqrt{h + 2}$.

10. Shprehe x nga formula $y = \frac{5x}{2} + 3$.

11. Shprehe P nga formula $Q = \frac{2}{P + 1}$.

12. Shprehe r nga formula $P = \frac{3\pi r^2}{2}$.

13. Një stilograf kushton 75 denarë.

Shëno shprehje për çmimin e përgjithshëm të x stilografëve.

14. Thjeshtoje shprehjen:

$5x + 7y + 3x - 4y$

15. Njehsoje vlerën e:

$7x - 3y$ kur $x = 2$ dhe $y = -4$

16. Një libër kushton 70 denarë, kurse një revistë kushton 30 denarë.

Shëno shprehje për njehsim të shumës së përgjithshme që duhet paguar për b libra dhe m revista.

17. Liroju prej kllapat te shprehja: $4\,(x - 6)$.

18. Liroju prej kllapat dhe thjeshto:

$7(3x - 2) - 2(4x - 3)$.

19. Masa e përgjithshme e x kulaçeve është 250 g.

Shëno shprehje me të cilën njehsohet masa e vetëm një kulaçi.

20. Liroju nga kllapat dhe thjeshto: $(x + 8)(x - 5)$.

21. Thjeshtoje shprehjen:

a) $m^5 \cdot m^3$

b) $p^5 : p^2$

c) $2x^3y^4 \cdot 3x^2y^3$.

22. Zbërtheji në shumëzues shprehjet: $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9}$.

23. Zbërtheji në shumëzues shprehjet:

a) $8x + 24$

b) $x^2 - 7x$.

24. Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzës që kalon nëpër pikat $(5, -2)$ dhe $(3, 8)$.

25. Plotësoje tabelën e vlerave për $y = 2x + 3$ dhe vizatoje grafikun e saj.

x	−2	0	1
y			

26. Vizatoje grafikun e drejtëzave:

a) $y = 3$

b) $y = 2x$

c) $5x + 2y = 10$.

27. Caktoji koordinatat e pikës në të cilën drejtëza $y = 3x + 4$ e pret boshtin y.

28. Caktoje koeficientin e drejtimit të drejtëzës $y = 4x + 2$.

29. Drejtëza $y = 2x + 5$ e pret drejtëzën $y = 2$ në pikën P.
Caktoji koordinatat e P.

30. Caktoje funksionin invers të funksionit $x \to 2x + 7$.

31. Zgjidhe grafikisht sistemin e barazimeve. Zgjidhjet rrumbullakoj në 1 vend dhjetor.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

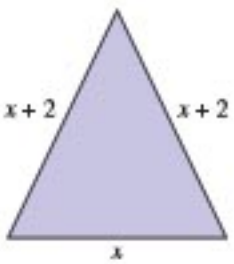
32. y është në proporcion të drejtë me x.
$y = 5$ kur $x = 25$
Caktoje vlerën e y kur $x = 9$.

33. Zgjidhe barazimin: $2x + 7 = 19$.

34. Zgjidhe barazimin: $\frac{8 - x}{3} = 6$.

35. Zgjidhe barazimin: $4(x - 1) + 3(x + 2) = 30$.

36. Perimetri i trekëndëshit në vizatim është 50 cm.
Shëno barazim sipas x dhe zgjidhe.



37. E dimë se $7 < 2x \leq 14$.
Nëse x është numër i plotë, shkruaji të gjitha vlerat e mundshme të x.

38. **a)** Zgjidhe jobarazimin $7x > 5x - 6$.

b) Paraqite zgjidhjen në bosht numerik

39. Zorica e përdor metodën e tentimeve dhe gabimeve për ta zgjidhur barazimin $x^3 + 2x = 26$

Në tabelë janë paraqitur dy vlerësimet e para të saja.

Vlerësim	$x^3 + 2x$	Komentim
2	$2^3 + 2 \cdot 2 = 12$	Tejet e vogël
3	$3^3 + 2 \cdot 3 = 33$	Tejet e madhe

Vazhdoje plotësimin e tabelës për të gjetur zgjidhjen e barazimit.

Rrumbullakoje zgjidhjen në 1 vend dhjetor.

40. Zgjidhe sistemin e barazimeve.

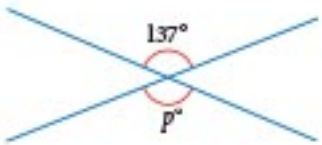
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

41. Zgjidhe sistemin e barazimeve.

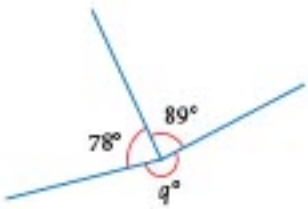
$$\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Gjeometria dhe zgjidhja e problemeve

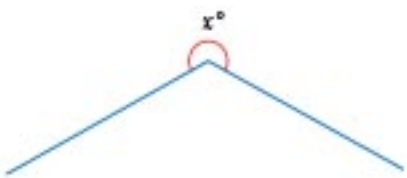
1. **a)** Shkruaje madhësinë e këndit $p°$ në shkallë.



b) Njehsoje madhësinë e këndit $q°$ në shkallë.

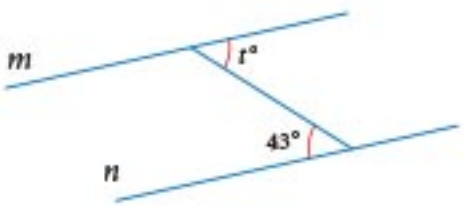


2. **a)** Prej cilit lloj është këndi $x°$?

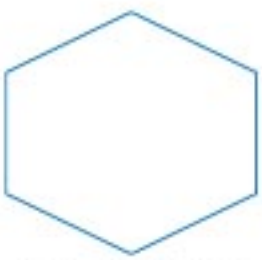


b) Përshkruaj dhe plotëso

$t°$ = ____ meqenëse _____



3.

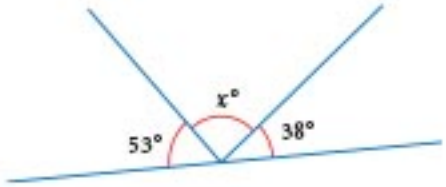


a) Si quhet 2D-forma në vizatim?

b) Njehsoje shumën e këndeve të brendshme të 2D-formës në vizatim.

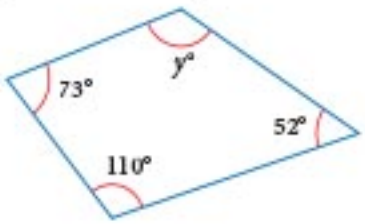
4. **a)** Përshkruaj dhe plotëso.

$x°$ = ____ meqenëse _____

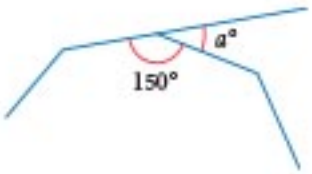


b) Përshkruaj dhe plotëso.

$y°$ = ____ meqenëse _____



5. Në vizatim është paraqitur pjesë nga shumëkëndëshi rregullt.



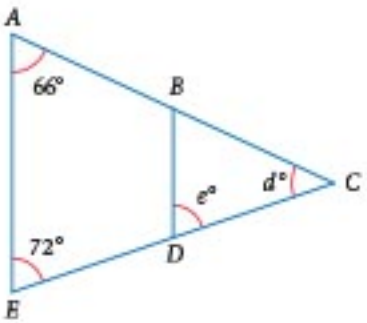
a) Shkruaje madhësinë e këndit $a°$.

b) Njehsoje numrin e brinjëve të shumëkëndëshit

6. Në vizatim është paraqitur trekëndëshi ACE.

$\overline{BD}$ është paralel me $\overline{AE}$.

$\sphericalangle BAE = 66°$, $\sphericalangle AED = 72°$



Njehso:

a) $\sphericalangle BCD$

b) $\sphericalangle BDC$.

Shpjego zgjidhjet e fituara.

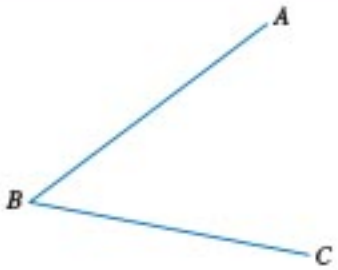
7. Çdo kënd i brendshëm i pesëkëndëshit të rregullt është 108°.

Me vizore dhe këndmatës konstrukto pesëkëndësh të drejtë me brinjë 4 cm.

8. Përshkruaje vizatimin në fletore

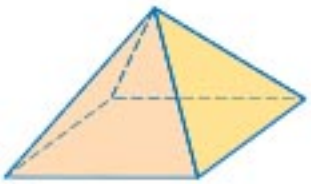
Me ndihmën e vizores dhe kompasit ndaje këndin në dy pjesë të barabarta.

Konstrukto simetrale të këndit të dhënë.



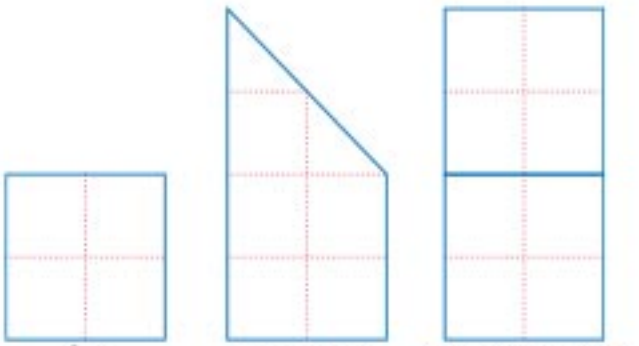
9. **a)** Shënoje emrin matematikor të 3D-formës dimensionale në vizatim.

b) Cakto sa rrafshe të simetrisë ka 3D-forma.



10. Me vizore dhe kompas konstrukto gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë 5 cm.

11. Në vizatim janë paraqitur plani dhe projeksionet e një 3D-forme.



Vizato 3D-formën në fletë izometrike.

12. Në vizatim është paraqitur baza e një pallati të vjetër.

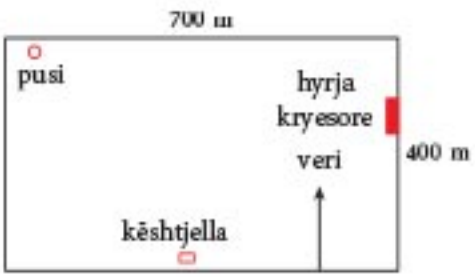
Forma e bazës është drejtkëndësh me dimensione 700 m dhe 400 m.

a) Vizatoje bazën e pallatit preciz në raport.

Përdore raportin: 1 cm përgjigjet në 50 m.

Harta e vjetër e arkës së groposur tregon se diçka është e groposur në tokë.

Ai vend është në azimut prej 115° nga pusi.



Ai vend është në azimut prej 340° nga kështjella.

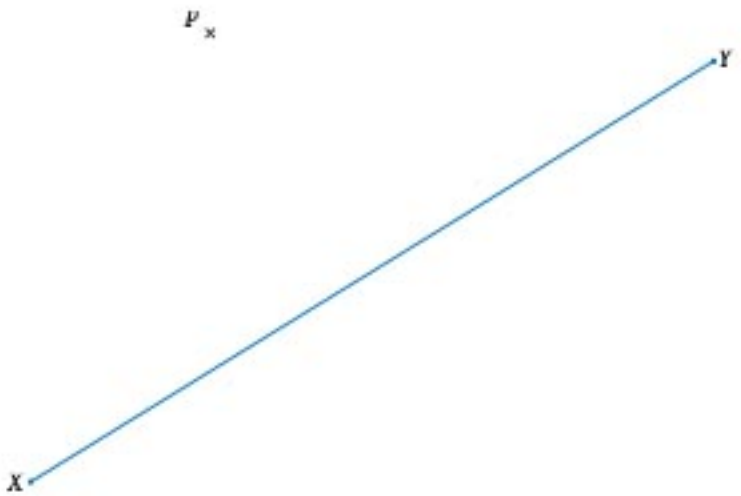
b) Vizato drejtëz prej pusit me azimut prej 115°.

c) Vizato drejtëz prej kështjellës me azimut prej 340°.

ç) Me „×“ shënoje vendin ku gjendet arka e groposur.

13. Shëno emrin e 3D-formës e cila ka gjashtë mure që janë katrore.

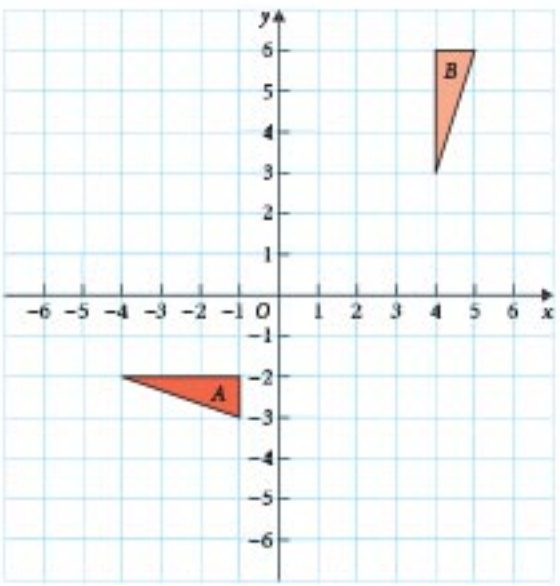
14. Përshkruaje vizatimin në fletore. $\overline{XY}$ është e gjatë 10 cm.



Me ndihmën e vizores dhe kompasit konstrukto normale prej pikës P drejt segmentit $\overline{XY}$.

Normalja është drejtëz normale me tjetër drejtëz.

Përshkruaj rrjetën katrore koordinative për t'i zgjidhur detyrat **15** *dhe* **16**.



15. **a)** Caktoje pikën (4, 2). Emërtoje me P.

b) Caktoje pikën (-4, 4). Emërtoje me Q.

c) Caktoji koordinatat e pikës së mesme të $\overline{PQ}$.

16. **a)** Bëje rotacionin e trekëndëshit A për 90° rreth (0, 0), në drejtimin të kundërt me lëvizjen e akrepave të orës.

Trekëndëshin e fituar shënoje me B.

b) Bëje përshkrimin detal vetëm të transformimit nga trekëndëshi B në trekëndëshin C.

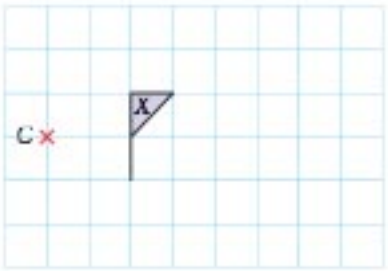
17. Përshkruaje katërkëndëshin në fletore me katrorë.

Vizato mozaik prej këtij katërkëndëshi.

Vizato së paku edhe pesë 2D-forma.

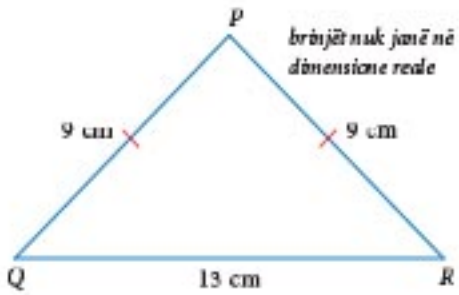


18. Përshkruaje vizatimin në fletore me katrorë.



Zmadhoje 2D-formën X me koeficiente 3 dhe qendër të zmadhimit C.

19. PQR është trekëndësh barakrahës me $\overline{QR} = 13$ cm dhe $\overline{PQ} = \overline{PR} = 9$ cm.



a) Konstrukto vizatim preciz të trekëndëshit të dhënë PQR.

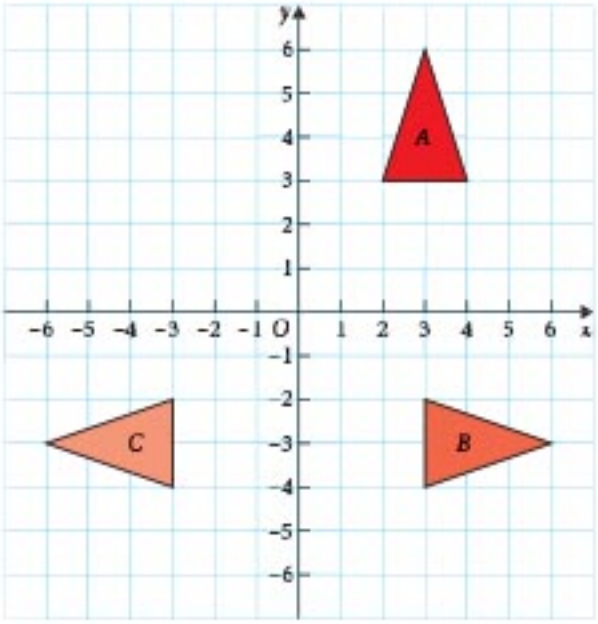
b) Konstrukto vend gjeometrik të pikave të cilat janë të baraslarguara 3,5 cm nga brinja $\overline{PQ}$.

c) Konstrukto vend gjeometrik të pikave të cilat janë të baraslarguara 5 cm nga pika P.

ç) Shënoje me X pikën e prerjes së dy vendeve gjeometrike të pikëve.

Mate distancën $\overline{XR}$.

20. Në vizatim janë paraqitur tre trekëndësha A, B dhe C.



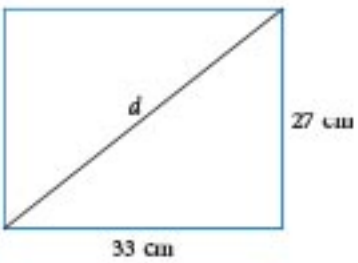
Bëj përshkrim detal të transformimit prej:

a) trekëndëshit A në trekëndëshin B.

b) trekëndëshit B në trekëndëshin C.

Zgjidhjet duhet t'i rrumbullakosh në 3 shifra të rëndësishme përveç nëse nuk është potencuar ndryshe.

21. Ekrani televiziv drejtkëndor ka dimensione 33 cm dhe 27 cm.
Njehso gjatësinë e diagonales d.
Rrumbullako zgjidhjen në milimetrin më të afërt.



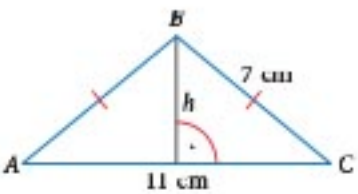
22. Në vizatim është paraqitur shkalla e gjatë 5,6 metra, e mbështetur për muri vertikal.
Baza e shkallës është e larguar 2,1 metra nga muri.
Dyshemeja është horizontale.
Cilën lartësi arrin skaji i sipërm i shkallës ashtu i vendosur?
Rrumbullakoje rezultatin në milimetrin më të afërt.



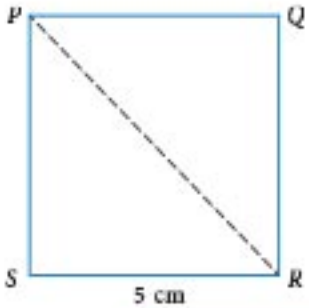
23. ABC është trekëndësh barakrahës.
$\overline{AB} = \overline{BC} = 7$ cm dhe $\overline{AC} = 11$ cm

a) Njehso lartësinë h të trekëndëshit.

b) Njehsoje syprinën e trekëndëshit ABC.



24. $PQRS$ është katror me brinjë 5 centimetra.
Njehso gjatësinë e diagonales.



25. Shtiza vertikale është e lartë 28 metra.

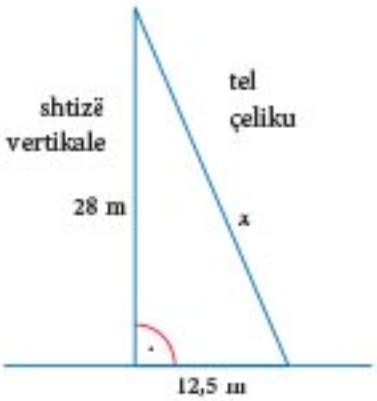
Është vendosur në dysheme horizontale.

Është përforcuar me tela çeliku përreth të shtrënguar prej majës së shtizës deri në dysheme.

Një prej këtyre telave është paraqitur në vizatim.

Çdo tel është përforcuar për toke e larguar 12,5 metra prej shtizës.

Njehso gjatësinë e telit.

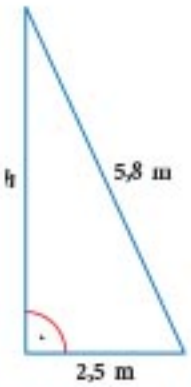


26. Në vizatim është paraqitur vela e një jahte.

Vela ka formën e trekëndëshit kënddrejtë.

Njehso gjatësinë e brinjës h.

Rezultatin rrumbullakoje në centimetrin më të afërt.



Detyra për vertëkontroll për temat 4 dhe 9

Matja dhe zgjidhja e problemeve

1. Përshkruaji dhe plotësoji këto pohime.

a) 4520 mililitra = ... litra.

b) 432 milimetra = ... centimetra.

c) 7,4 tone = ... kilogramë.

2. **a)** Në një fabrikë prodhohen makina për larje, prej të cilave secila ka masë prej 62 kilogramëve.

Njehsoje masën e përgjithshme të 36 makinave të tilla për larje.

Zgjidhjen shkruaje në tone.

b) Një kamion mund të ngarkoj barrë, maksimum, prej 10 toneve.

Sa makina për larje mund të ngarkohen në kamion?

3. Andreu ka bokall që nxë 2,4 litra lëng molle.

Ai e ka ndarë në mënyrë të barabartë në 6 gota.

Njehso sa mililitra lëng molle ka në çdo gotë.

4. Lejla ka blerë shirit për perde të gjatë 2,4 metra.

Asaj i duhet shirit të gjatë 1,95 metra për dritaren e saj

Njehso sa centimetra duhet të pres nga shiriti që e ka blerë që të përgjigjet për dritaren e saj

5. Nënrenditi gjatësitë vijuese, duke filluar nga më e vogla.

0,28 m 29 mm 27 cm 2,8 m 285 mm

6. Përshkruaj dhe plotëso.

a) 12,3 litra = ... mililitra.

b) 32,6 kilogramë = ... gramë.

c) 4235 centimetra = ... metra.

7. Marku ka matur një libër në peshore.

Në figurë është treguar peshorja.



a) Shkruaje masën e librit në gramë.

Marku ka dashur të paketojë 7 libra të tillë që t'i dërgojë si porosi postare.

b) Njehsoje masën e përgjithshme e të gjithë 7 librave në kilogramë

8. Para kinemasë lokale qëndron mbishkrimi.



a) Shndërroje kohën në formatin 12-orësh.

b) Njehso në sa ora do të mbarojë filmi.

Zgjidhjen shënoje në formatin 24-orësh.

9. Automobili kaloi 400 metra për 21,5 sekonda.

Njehsoje shpejtësinë mesatare të tij, të rrumbullakuar në 1 vend dhjetor.

10. Në tabelë janë paraqitur kohët e nisjes për tre autobusë.

	Nisjet		
Shkup	13:45	14:54	16:01
Tetovë	14:08	15:17	16:24
Gostivar	14:22	15:31	16:38
Mavrovë	14:58	16:07	17:14
Kërçovë	15:20	16:29	17:36
	16:08	17:17	18:24

a) Në sa ora autobusi që niset në 14:54 prej Shkupit do të mbërrijë në Kërçovë?

b) Shndërroje zgjidhjen nën **a)** në formatin 12-orësh.

c) Emilija e mbaroi punën e saj në Gostivar në ora 3:50 pasdite.

Sa kohë duhet të presë autobusin e radhës për në Ohër?

11. Lëngu i shtrydhur nga portokalli shitet në tri shishe të ndryshme sipas sasisë dhe çmimit.

Shishe prej 600 ml kushton 69 denarë

Shishe prej 1 l kushton 99 denarë

Shishe prej 2 l kushton 189 denarë

a) Njehsoje çmimin e një litri për secilën shishe.

b) Cila nga shishet ka çmim më të volitshëm?

12. Tabela e dhënë paraqet gjatësitë e kohëve të fluturimeve dhe distancat mes metropoleve Londër, Kuala Lumpur dhe Ouklend.

Distanca mes Kuala Lumpur dhe Ouklend mungon në tabelën e dhënë.

	Koha e fluturimit	Distanca (km)
Nga Londra në Kuala Lumpur	13 orë 30 minuta	10557
Nga Kuala Lumpur në Ouklend	11 orë 24 minuta	

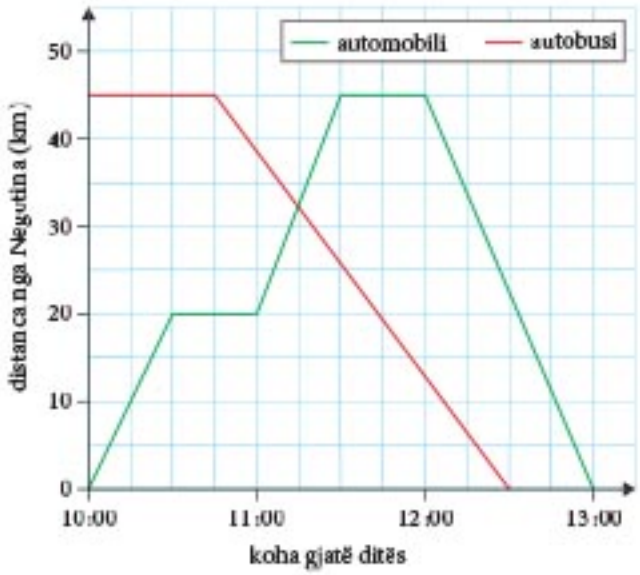
a) Njehsoje shpejtësinë mesatare të avionit ndërmjet Londrës dhe Kuala Lumpur.

b) Shpejtësia mesatare mes Kuala Lumpur dhe Ouklend është 765 km/h.

Njehso distancën mes Kuala Lumpur dhe Ouklend.

13. Ngjyra e kuqe në grafik paraqet udhëtimin me automobil ndërmjet Negotinës dhe Strumicës.

Qytetet janë larg njëra tjetrës 45 kilometra.



Automobili niset prej Negotinës në 10:00.

a) Në sa ora do të mbërrijë në Strumicë?

b) Sa kohë automobili nuk ka lëvizur në Strumicë?

Vija e kuqe paraqet lëvizjen e autobusit nga Strumica deri në Negotinë.

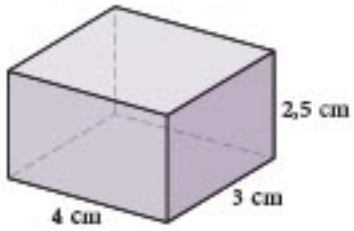
Autobusi u nis nga Strumica në 10:45.

c) Njehsoje shpejtësinë mesatare të autobusit.

ç) Shënoje kohën kur autobusi dhe automobili do të takohen.

14. Shndërro 1,1 orë në orë dhe minuta

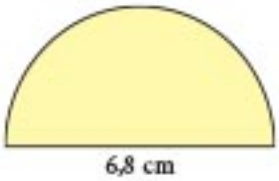
15. Kuadri i dhënë ka dimensionet 4 cm, 3 cm dhe 2,5 cm.



a) Njehsoje vëllimin e tij.

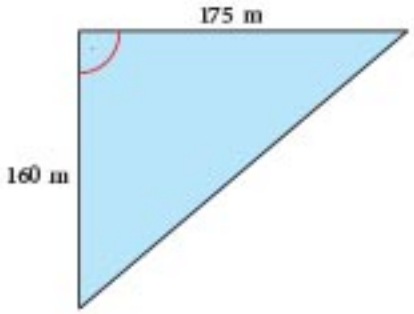
b) Njehsoje syprinën e tij.

16. Gjysmërrethi ka diametrin 6,8 cm.



Njehsoje syprinën e gjysmërrethit. Zgjidhjen rrumbullakoje në 3 shifra të rëndësishme.

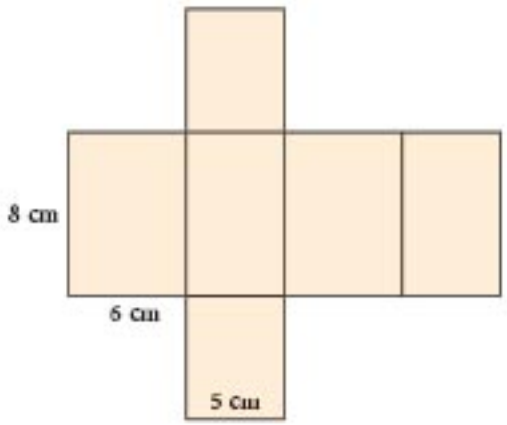
17. Në vizatimin është paraqitur plani i një are.



a) Njehsoje syprinën e arës në metra katrorë.

b) Zgjidhjen e fituar shndërroje në hektarë.

18. Në vizatimin është paraqitur rrjeta e një 3D-forme.



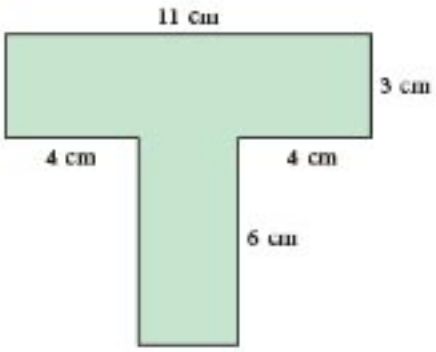
a) Njehsoje syprinën e 3D-formës.

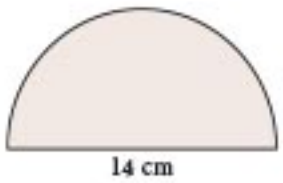
b) Njehsoje vëllimin e 3D-formës.

19. Sa mm^3 ka në 1 cm^3?

20. Njehso cila prej 2D-formave të dhëna ka perimetër më të madh.

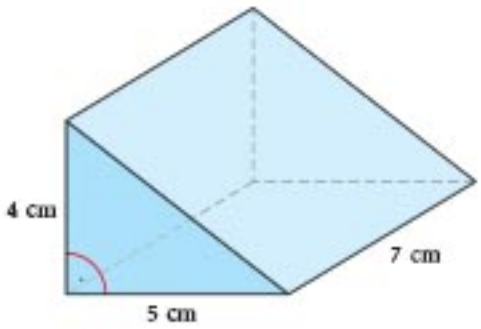
Paraqiti gjithë hapat e njehsimit.



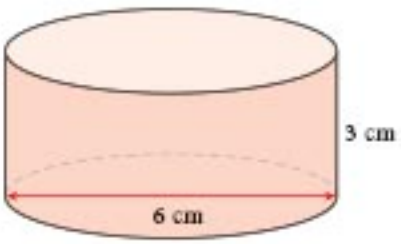


21. Sa cm^2 ka në 1 m^2?

22. Njehsoje vëllimin e prizmit sipas të dhënave në vizatim.



23. Në vizatimin është paraqitur cilindër me diametër 6 cm dhe lartësi 3 cm.



a) Njehsoje syprinën e cilindrit.

b) Njehsoje vëllimin e cilindrit.

Puna me të dhëna dhe zgjidhja e problemeve

1. Andreu hedh zarin tridhjetë herë.

Ja rezultatet e fituara nga këto hedhje.

3 5 4 3 3 6 4 3 1 4

3 1 5 6 4 1 2 4 3 2

6 5 2 6 4 6 4 5 3 3

a) Përshkruaje në fletore dhe plotësoji frekuencat në tabelë.

Numri	Frekuenca
1	
2	
3	
4	
5	
6	
	Gjithsej 30

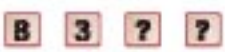
b) Cakto:

i modën

ii medianën

iii mesataren

2. Darko ka katër karta. Në secilën kartë është shënuar numër.



a) Nëse moda e numrave është 8, kurse mediana 6, cilët janë dy numrat e tjerë?

b) Nëse rangu i numrave është 5, kurse mesatarja e tyre është 5, cilët janë dy numrat e tjerë?

3. Janë dhënë lartësitë, në centimetra, e një grupi njerëzish.

162 183 175 190 176 169 181 177 171

Njehso:

a) medianën e lartësive.

b) mesataren e lartësive.

4. Jovani shkroi përmes tastierës 32 fjalë për 4 minuta. Marku shkroi 224 fjalë për 7 minuta.

Cili shkroi më shpejt?

5. Numri i minutave të vonesave të autobusëve që mbërrijnë në stacionin e autobusëve është paraqitur në tabelën më poshtë.

Numri i minutave të vonesës, m	Frekuenca	Vlera mesatare e klasës
$0 < m \leq 10$	16	
$10 < m \leq 20$	10	
$20 < m \leq 30$	11	
$30 < m \leq 40$	8	
$40 < m \leq 50$	5	

a) Përshkruaje tabelën dhe plotësoje kolonën për vlerat mesatare të klasave.
Shfrytëzo vlerat mesatare të klasave që të japësh vlerësimin e mesatares së numrit të minutave të vonesës së autobusëve.

b) Cila klasë e përmban medianën e numrit të minutave të vonesës së autobusëve?

6. 30 nxënës zgjidhin testin nga matematika.

Në testin e përpiluar mund të fitohen maksimum 50 pikë.

Damjani bëri këtë tabelë për t'i prezantuar notat

Notat	Frekuenca
0-20	3
20-25	12
25-40	14
40-50	1
Gjithsej	30

Gjeji dy parregullsi të tabelës.

7. Vesna zhvillon një hulumtim për të zbuluar sa kohë nxënësit kalojnë duke dëgjuar radio.

Ajo përpiloi pyetësor.

Ja një pyetje nga pyetësori i saj:

Sa orë kaloni në të dëgjuarit e muzikës nga radioja çdo javë?

Ju lutem rrethoni

- ❑ 1 deri 5
- ❑ 5 deri 10
- ❑ 10 deri 20
- ❑ Më tepër se 20

Gjeji dy parregullsi të pyetjes së Vesnës.

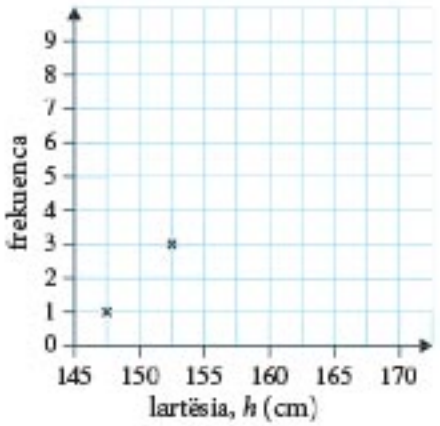
8. Janë dhënë lartësitë, të rrumbullakuar në centimetrin më të afërt, të një grupi vajzash trembëdhjetëvjeçare.

154	162	148	158	163	168	155	160
152	164	162	166	163	167	170	161

a) Përshkruaje në fletore dhe plotësoje frekuencën e lartësive për lartësitë e vajzave.

lartësia, h (cm)	Vijëzat	Frekuenca
$145 < h \leq 150$		
$150 < h \leq 155$		
$155 < h \leq 160$		
$160 < h \leq 165$		
$165 < h \leq 170$		

b) Plotësoje poligonin e frekuencave për lartësitë e vajzave.



9. Një agronom teston lloj të ri plehu artificial. Ai kultivon disa bimë në dy parcela, A dhe B.

Plehun e ri e përdori në parcelën A. Në parcelën B nuk u përdor plehu i ri.

Mati lartësitë e bimëve pas një muaji. Mediana për parcelën A është 76,5 cm, kurse rangu është 46.

Rezultatet janë paraqitur në diagramet trung-gjethe të njëpasnjëshme.

Parcela A		Parcela B
	4	0 1 1 7
9 7 6 4 4 1	5	1 2 2 3 3 3 4 6 8
5 5 5 3 2	6	0 0 3 4 5 5 6 7 9
9 7 7 6 6 4 2 1	7	0 1 2 2 3 7 8
9 8 5 3 2 2 0	8	0 1 1 4 6
7 7 4 1 1 0	9	

Çelësi: 1|7|0 domethënë lartësia e bimës A 71 cm dhe lartësia e bimës B 70 cm.

a) Gjeje medianën e lartësive të bimëve në parcelën B.

b) Gjeje rangun e lartësive të bimëve të parcelës B.

c) Krahasoji bimët e kultivuara në dy parcelat A dhe B.

Bëj dy krahasime.

10. Në një kuti ka topa të kuq, të gjelbër, të verdhë dhe të kaltër.

Gjasat që të zgjidhet rastësisht ndonjëra nga këto ngjyra janë dhënë në tabelë.

Ngjyra	e kuqe	e gjelbër	e verdhë	e kaltër
Gjasa	0,2	0,1	0,4	

Sa është gjasa të zgjidhet rastësisht top i kaltër?

11. Është dhënë fer-rrotulluese në formë të gjashtëkëndëshit të rregullt.

Gjasa që të fitohet numër çift është dy herë më e madhe se gjasa të fitohet numër tek.



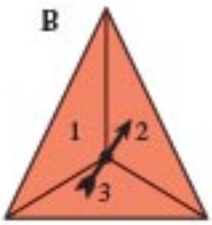
Shëno në vizatimin numër të plotë në secilën pjesë të rrotullueses që të jetë i saktë pohimi i dhënë.

12. Në vizatime janë paraqitur dy fer-rrotulluese.

A



B



a) Plotësoje tabelën e ngjarjeve që t'i paraqesësh të gjitha ngjarjet e mundshme për të dy rrotullueset.

		rrotulluesja B		
		1	2	3
rrotulluesja A	1	1, 1	1, 2	1, 3
	3	3, 1		
	5		5, 2	
	7		7, 2	

b) Sa është gjasa të fitohet shuma numër tek e numrave në dy rrotullueset?

13. Ivani përdor dy fer-rrotulluese në një lojë.

Ivani shënoi shumën e të dy numrave ku janë ndalur rrotullueset.

a) Plotësoje tabelën dhe paraqiti gjitha ngjarjet e mundshme.

		rrotulluesja 2				
		1	2	3	4	5
rrotulluesja 1	1	2	3	4	5	6
	2		4	5	6	7
	3			6	7	8
	4				8	9
	5					10

b) Përcaktoje gjasën kinse Ivani ka fituar:

i shumën 2 **ii** shumën 11

c) Përcaktoje gjasën se Ivani kinse ka fituar shumën më të madhe se 6.

Shkruaje zgjidhjen si thyesë të pathjeshtueshme.

Fjalor

A

azimut Kënd i matur nga veriu në drejtim të lëvizjes së akrepave të orës, i cili përdoret për caktim të kahut.

anëtari i *n*-të Anëtari i përgjithshëm i vargut.

B

barazim Pohim matematikor sipas së cilit dy shprehje me ndryshore janë të barabarta.

baza e fuqisë Numri që fuqizohet.

brendashkruar Konstruktim i 2D-formës me kulme që shtrihen në brinjët e 2D-formës tjetër.

busull Instrument për caktim të kahut, zakonisht përmes drejtimit veri.

C

centi Prefiks metrik për 1/100.

D

diagonale Segment në shumëkëndësh që lidh dy kulme jofqinje.

diagram me pika Diagram me të cilin paraqiten vlerat e dy grupeve të dhënash si pika.

diagram shtyllor i dyfishtë Diagram shtyllor tek i cili janë paraqitur vlerat e të dhënave për dy grupeve.

diagram shtyllor i shumëfishtë Diagram shtyllor që paraqet më tepër se një grup të dhënash.

diametër Kordë që kalon nëpër qendër të rrethit.

drejtëza normale Drejtëza që priten nën kënd të drejtë.

dydimensional 2D-forma që ka vetëm gjatësi dhe gjerësi, por jo edhe lartësi.

E

eksperiment Një mori tentimesh.

emërues Emri i vlerës nën vijën thyesore të thyesës.

F

fitim Kur prodhimi shitet me çmim më të lartë se sa shpenzimet e saja fillestare, atëherë dallimi quhet fitim (shitje – shpenzime të përgjithshme = fitim).

formë më e thjeshtë Shënim i thyesës apo shprehjes që nuk mund të thjeshtohet më tepër.

formim i mozaikut të rregullt Formim mozaik prej një lloj shumëkëndëshi të rregullt.

formim i mozaikut Formim i skemës prej 2D-formave që mbulojnë sipërfaqe të rrafshët pa përputhje dhe pa zbrazëtira.

formula Rregulla të cilat lidh dy apo më tepër ndryshore.

frekuencë relative Numri i ecurive të suksesshme / numri i tentimeve të përgjithshme.

funksion linear Funksion te i cili e panjohura ka tregues fuqie 1. Grafiku i funksionit linear është drejtëz.

fuqi Shënim për shumëzim të shkurt të numrit me vetveten.

G

grafik i rrugës së kaluar Grafiku që parqet rrugën e përshkruar për interval kohor të caktuar.

gram Njësi matëse për masën.

GJ

gjatësi e vijës rrethore (ose rrethit) Perimetri i vijës rrethore.

H

hektar Njësi matëse për syprinë e barabartë me 10000 metra katrorë.

hipotenuzë Brinja më e gjatë në trekëndëshin kënddrejtë.

hulumtim Metodë e grumbullimit të të dhënave ose parashtrimit të pyetjeve ose duke kryer vëzhgime.

humbje Kur prodhimi shitet me çmim më të ulët se shpenzimet e saja fillestare, atëherë dallimi quhet humbje.

I

intervistë Bisedë mes dy personave ku njëri i parashtron pyetje tjetrit.

J

jokonveks Shumëkëndësh që ka së paku një kënd të brendshëm më të madh se 180°.

K

kamatë e thjeshtë Kamatë që paguhet njëfish në fund të periudhës së deponimit.

katror i plotë Numër që fitohet me shumëzim të numrit të plotë me vetveten. Shkalla e dytë e numrit.

kënd i jashtëm Kënd që formohen në jashtësinë e shumëkëndëshit kur vazhdohet ndonjëra prej brinjëve të saja.

kilo Prefiks metrik për 1000.

koeficient i drejtimit Masë për pjerrtësi të grafikut të drejtëzës.

koeficient i ngjashmërisë Herës prej gjatësive të brinjëve përkatëse të origjinalit dhe pasqyrës.

konveks Shumëkëndësh këndet e brendshme të të cilit janë më të vogla se 180°.

korrelacion pozitiv Kur një madhësi zmadhohet, atëherë zmadhohet edhe tjetra madhësi.

korrelacion Lidhja mes dy grupeve të dhënash.

korrelacion negativ Kur njëra madhësi rritet e tjetra zvogëlohet.

korrelacion nulta Pikat në diagram nuk tregojnë kurrfarë trendi.

kulm Pikë ku takohen dy brinjë të shumëkëndëshit.

L

letër izometrik Letër me varg trekëndor të pikave të cilat ndërmjet veti përfshijnë kënd prej 120°.

lirim prej kllapave Proces i shumëzimit të anëtarëve brenda në kllapë me anëtarin jashtë kllapës së një shprehjeje.

litër Njësi matëse për vëllim të lëngshëm.

M

metër Njësi matëse për gjatësi.

mili Prefiks metrik për 1/1000 prej njësisë themelore.

mostër Pjesë e popullimit që e pyesim, kur nuk duan ta pyesim tërë popullimin.

N

ndryshore Madhësi që mund të pranojë vlera të ndryshme, zakonisht e shënuar me shkronjë.

ngjashmëri Dy 2D-forma janë të ngjashme nëse kanë kënde të barabarta dhe anë të përpjesshme.

numër i përzier Numër i përbërë nga numri i plotë dhe thyesa.

numërues Emri i vlerës mbi vijën thyesore të thyesës.

njehsime ekuivalente Njehsime që japin rezultat të njëjtë. Për shembull, $13 \cdot 0{,}03$ është njehsim ekuivalent me $13 \cdot 3 : 100$.

njësi e përbërë Njësi matëse, si shpejtësia, që njehsohet prej dy madhësive tjera.

O

origjinal 2D-formë fillestare para se të fillohet me transformimin gjeometrik.

P

pabarazi Shënim prej dy shprehjeve numerike të lidhur me njërën prej shenjave $<, >, \geq, \leq$.

pabarazim Pabarazimi është pabarazi me ndryshore, si për shembull, $x > 5$ose $y \leq -2$.

pasqyrë Figura pas transformimit gjeometrik.

pi (π) Herës i gjatësisë së vijës rrethore dhe diametrit të tij. Përafërsisht i barabartë me 3,141592654.

plan Perspektivë e 3D-formës nga sipër.

poligon i frekuencës Lloj diagrami i frekuencës që përdoret për të dhëna të grupuara. Pikat vizatohen për vlerat mesatare të klasave.

popullim Tërë grupi që është objekt hulumtimi.

prerje tërthore 2D-formë që fitohet nëse 3D-forma pritet me rrafsh në pikë të çfarëdoshme.

prizëm 3D-forma me figurë të njëjtë të prerjes tërthore.

prizmi 3D-forma me 2D-formë të njëjtë të prerjes tërthore.

probabilitet eksperimental Numri i ecurive të suksesshme. Numri i përgjithshëm i tentimeve.

projeksion anësor Pamje nga anësh e 3D-formës.

projeksion i përparmë Pamje e 3D-formës përpara.

projeksion Pamje e 3D-formës.

proporcion i drejtë Dy madhësi y dhe x janë të drejta proporcionale, nëse $y = kx$, respektivisht herësi i tyre është konstant.

puthitshëm 2D-forma të puthitshme që kanë gjatësi dhe kënde të barabarta.

puthitshëm pasqyrë 2D-forma pas transformimit gjeometrik.

pyetësor Grup i pyetjeve të shkruara.

R

rezultate që reciprokisht përjashtohen Ecuri që nuk mund të ndodhin njëkohësisht, porse vetëm njëri nga to.

RR

raport njësi Raport në formën $1 : n$ ose $n : 1$.

raporte ekuivalente Raporte që tregojnë se madhësitë e njëjta relative janë ekuivalente.

rrafsh i simetrisë Rrafsh apo sipërfaqe e rrafshët e cila sillet si pasqyrë dhe e cila e ndan 3D-formën në dy pjesë të puthitëshme. Secila nga këto pjesë është pasqyrë e tjetrës.

rregulla për anëtarin e n-të të vargut Rregulla të cilat lidhin anëtarë të vargut me numrin rendor të tij në varg.

rregulla për caktimin e anëtarit vijues të vargut Rregulla të cilat lidhin dy anëtarë fqinjë të vargut.

rrjeta Perspektivë e 3D-formës nga sipër.

S

simetri boshtore Simetri në lidhje me drejtëzën.

simetria Pasqyrim në raport me diçka (pikë, drejtëz, rrafsh ose të ngjashme) me çka një formë pasqyrohet në formë të puthitshme. Gjatë kësaj forma dhe pasqyra e saj janë të puthitshme njëra në tjetrën.

sistem i barazimeve Disa barazime me dy apo më tepër ndryshore për të cilat ekzistojnë vlera përkatëse për ndryshoret të cilat janë zgjidhje e të gjithave njëkohësisht.

sistem metrik Sistem i njësive matëse të bazuar në sistemin numerik dekadë.

shifra të rëndësishme Shifra të numrit. Shifra e parë jozero në numrin është shifra e rëndësishme e parë dhe të gjitha të tjerat pas saj janë shifra të rëndësishme.

shkallë e saktësisë Numri i vendeve decimale ose shifrave të rëndësishme të numrit.

shpejtësi mesatare Shpejtësi e llogaritur në moment të caktuar kohor.

shpejtësi Rruga e kaluar për njësi kohe.

shprehje Grup i anëtarëve që nuk përfshijnë shenjën barazi.

shumëkëndësh 2D-formë gjeometrike me brinjë të drejta.

shumëkëndësh i rregullt Shumëkëndësh me brinjë të barabarta dhe kënde të barabarta.

T

tabelë e ecurive Tabelë që paraqet të gjitha ecuritë e një eksperimenti.

tentim Eksperiment i njëfishtë.

tentime dhe gabime Mënyra e caktimit të zgjidhjeve të përafërta të barazimeve, gjatë së cilës bëhet vlerësimi dhe pastaj kryhen tentime për vlerësim më të saktë.

teoremë Pohim matematikor saktësia e të cilit mund të vërtetohet.

tesalacion Shtruarja me pllaka të sipërfaqes së rrafshët me skemë të 2D-formës pa përputhje dhe pa zbrazëtira mes tyre.

të dhëna primare Të dhëna që vetë i grumbullojmë.

të dhëna sekondare Të dhëna që ka grumbulluar dikush tjetër.

transformim Lëvizje ose ndryshim i një 2D-forme në tjetër.

tredimensionale Objekt që ka gjatësi, gjerësi dhe lartësi.

tregues i fuqisë Numri lart në fuqi që tregon sa herë baza shumëzohet me vetveten: për shembull, te 3^5, treguesi i fuqisë është numri 5.

trung-gjeth diagrami Diagram i frekuencës që i organizon të dhënat sipas madhësisë.

trung-gjeth diagrami suksesiv Diagram që përdoret për organizim të dy grupeve të dhënash, të renditura sipas madhësisë.

thjeshtim i shprehjes Mënyra në të cilën mblidhen apo zbriten anëtarët e ngjashëm në shprehje.

thjeshtim i shumëzuesve Procedurë me të cilën një shprehje nxirret para kllapave të ShVP për të gjithë anëtarët e vet

thjeshtim i thyesës Thjeshtim i thyesës.

thjeshtim Procedurë me të cilën numëruesi dhe emëruesi pjesëtohen me numër të njëjtë.

thyesë e padrejtë Thyesa në të cilën numëruesi është më i madh se emëruesi.

V

varg Grup numrash ose shema të lidhura me ndonjë rregull.

varg linear Varg në të cilin dallimi mes çfarëdo dy anëtarëve të tij fqinjë është numër konstant.

vend dhjetor (v.dh.) Shifër në numrin dhjetor pas presjes dhjetore. Për shembull, 1 vend dhjetor (v. dh.) domethënë një shifër pas presjes dhjetore.

vend gjeometrik i pikave Bashkësi pikash të cilat plotësojnë veti të caktuar.

vëzhgim Proces gjegjësisht procedurë me të cilën grumbullohen të dhëna primare të cilat shënohen kur vërehen, për shembull numri i automobilave që kalojnë nga një vend i caktuar.

vlerësim i mesatares Caktohet duke i përdorur vlerat mesatare në klasat e grupit të të dhënave. Ai është vlerësim kur nuk dihen vlerat e sakta.

Z

zbërthim në shumëzues Procedurë me të cilën në një shprehje nxirret para kllape PMP i të gjithë anëtarëve. E kundërta e procedurës së lirimit prej kllapave.

zëvendësim Proces gjatë të cilit në vend të shkronjave në formulë ose shprehje zëvendësohen vlera të dhëna.

zmadhim Transformim gjeometrik me të cilën ndryshohet madhësia e 2D-formës sipas koeficientit të dhënë të ngjashmërisë. Fitohet 2D-forma e ngjashme por më e madhe se e dhëna.

zvogëlim procentual Përqindje për të cilën ndonjë vlerë është zvogëluar.